# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

53. BAND 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 21. JULI 1950)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1950

Math.
Z.

53. Band. **Inhalt:** 1. Heft.

Seite

Eichler, Prof. Dr. M., Münster i. Westf., Schlaunstr. 4: Eine Modifikation der Riemannschen Integrationsmethode bei partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typ ..... 1

Eichler, Prof. Dr. M., Münster i. Westf., Schlaunstr. 4: Zur Algebra der orthogonalen Gruppen ..... 11

Nickel, Dr. K., Tübingen, Math. Institut der Universität: Lösung eines speziellen Minimumproblems ..... 21

Avacumovic, Dr. V. G., Institut mathemat. de l' Academie serbe des Sciences, Belgrad (Jugoslav.) Brankova 15: Bemerkung über einen Satz des Herrn T. Carleman ..... 53

Neumer, Dr. W., Worms a. Rhein, Talstr. 13: Über den Aufbau der Ordnungszahlen ..... 59

Klein-Barmen, Dr. F., Wuppertal-Wichlinghausen, Müggenburg 62: Zur Axiomatik der ausgeglichenen Gewebe ..... 70

Dinghas, Prof. Dr. A., Berlin-Dahlem, Math. Institut der Freien Universität, Boltzmannstr. 3: Zur Darstellung einiger Klassen hypergeometrischer Polynome durch Integrale vom Dirichlet-Mehlerschen Typus ..... 76

Rothstein, Dr. W., Würzburg, Math. Institut der Universität: Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Funktionen ..... 84

Unveränderter Nachdruck 1975

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 1, Seite 1—10 (1950).

# Eine Modifikation der Riemannschen Integrationsmethode bei partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typ.

Von

**Martin Eichler in Münster.**

## 1. Einleitung.

In den letzten Jahren ist die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typ Gegenstand zahlreicher Veröffentlichungen gewesen (s. Literaturverzeichnis am Schluß). Man stellte ihre Lösungen $u(x, y)$ durch Integrale der Form

$$u(x, y) = f(z) - \int_0^z G(x, y, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta \tag{1}$$

oder auch von allgemeinerer Form dar, wobei $G$ eine ein für alle mal zu bestimmende Funktion, die sog. *erzeugende Lösung*, ist und $f(z)$ eine beliebige analytische Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$. Es zeigte sich, daß zahlreiche Sätze der klassischen Funktionentheorie auf diese Weise auf die Lösungen allgemeiner partieller linearer Differentialgleichungen vom elliptischen Typ übertragen werden können. In diesem Zusammenhang wurde gelegentlich auch auf die Verwandtschaft dieses Ansatzes mit der Riemannschen Integrationsmethode hingewiesen. Das ist kein Wunder, da ja die Rechnungen zum großen Teil formaler Natur waren und die Unterschiede zwischen dem elliptischen und hyperbolischen Typ durch die Einführung komplexer Veränderlicher verwischt werden. Meines Wissens ist jedoch diese Verwandtschaft beider Ideen nie im Einzelnen beleuchtet worden, und das soll in der vorliegenden Note nachgeholt werden.

Der einzige Nachteil der sonst so eleganten Riemannschen Integrationsmethode besteht in der Schwierigkeit, die Riemannsche Funktion explizit zu berechnen, was bisher erst in Spezialfällen gelungen ist, s. hierzu die interessante Arbeit von H. Cohn [7]. Die Übertragung des Begriffes der erzeugenden Lösung auf Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typ folgt zwar einerseits dem Grundgedanken Riemanns, nämlich alle Lösungen durch eine solche zu erzeugen, die noch von weiteren Parametern abhängt, aber andererseits scheint sie einfacher, da Riemann zwei weitere Parameter braucht, während wir mit einem

einzigen auskommen. Es ist klar, daß man dafür eine verringerte Eleganz bei der Endlösung des Cauchyschen Problems in Kauf nehmen muß.

## 2. Die erzeugenden Lösungen.

Die zu integrierende Differentialgleichung wollen wir in der speziellen Gestalt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + M \frac{\partial u}{\partial y} + N u = 0 \qquad \text{mit } M(x, 0) = 0 \tag{2}$$

voraussetzen, wobei $M$, $N$, $\frac{\partial M}{\partial y}$ in einem achsenparallelen Rechteck stetige Funktionen der beiden Variablen $x, y$ seien. Es ist leicht zu sehen, daß jede lineare Differenzialgleichung vom hyperbolischen Typ unter gewissen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für ihre Koeffizienten in diese Gestalt gebracht werden kann[1]). Sind $f_1(x)$, $f_2(y)$ beliebige stetig differenzierbare Funktionen, so sind

$$u_1(x, y) = f_1(x) - \int_0^x G_1(x, y; \xi) f_1(\xi)\, d\xi, \tag{3}$$

$$u_2(x, y) = \left(f_2(y) - \int_0^y G_2(x, y; \eta) f_2(\eta)\, d\eta\right) \exp\left(-\int_0^x M(\xi, y)\, d\xi\right) \tag{4}$$

und natürlich auch ihre Summe Lösungen von (2), falls

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y} + M \frac{\partial G_1}{\partial y} + N G_1 = 0, \\ \frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial y} - \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} M(\xi, y)\, d\xi \cdot \frac{\partial G_2}{\partial x} + \left(N - \frac{\partial M}{\partial y}\right) G_2 = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} G_1(x, y; x) = N, \qquad \frac{\partial}{\partial x} G_2(x, y; y) = N - \frac{\partial M}{\partial y} \tag{6}$$

gilt. Der Beweis ergibt sich durch formale Rechnung, wobei vorausgesetzt werden muß, daß $G_1$, $G_2$ und ihre ersten und gemischten zweiten Ableitungen stetige Funktionen von $\xi$ bzw. $\eta$ sind. $G_1$ und $G_2$ sollen *erzeugende Lösungen* von (2) *der ersten* und *zweiten Art* heißen. Sie mögen *ausgezeichnet bezüglich* $y = 0$ bzw. $x = 0$ heißen, falls

$$G_1(x, 0; \xi) = 0, \qquad G_2(0, y; \eta) = 0 \tag{7}$$

ist.

---

[1]) Ist die Differentialgleichung $U_{xy} + A U_x + B U_y + C U = 0$ vorgelegt, so erhält man die Normalform (2) ohne den Zusatz $M(x, 0) = 0$ durch den Ansatz $U = Vu$ mit $2V_y + A V = 0$. Hierbei ist $V$ bis auf eine beliebige Funktion $h(x)$ bestimmt, welche man so wählen kann, daß $M(x, 0) = 0$ wird. — Diese Auszeichnung der Koordinate $y = 0$ erhält ihren Sinn im Zusammenhang mit dem in Nr. 4 gestellten Cauchyschen Problem.

Die Existenz ausgezeichneter erzeugender Lösungen beweist man ebenso wie die Existenz der RIEMANNschen Funktion. Die Aufgabe erscheint klarer, wenn man (6) so schreibt:

$$G_1(\xi, y; \xi) = \int_0^y N(\xi, \eta)\, d\eta + g_1(\xi),$$

(8)

$$G_2(x, \eta; \eta) = \int_0^x \left(N(\xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} M(\xi, \eta)\right) d\xi + g_2(\eta).$$

Es sind also Anfangswerte für $G_1(x, y; \xi)$ und $G_2(x, y; \eta)$ auf den Charakteristiken $x = \xi$, $y = 0$ bzw. $x = 0$, $y = \eta$ vorgeschrieben, und $G_1$ und $G_2$ sind hierdurch eindeutig festgelegt.

Man kann leicht von einer erzeugenden Lösung der ersten Art zu einer der zweiten Art übergehen und umgekehrt. Wenn $u$ die Gleichung (2) befriedigt, ist

$$v(x, y) = u(y, x) \exp\left(\int_0^y M(\eta, x)\, d\eta\right) \tag{9}$$

eine Lösung von

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \overline{M} \frac{\partial v}{\partial y} + \overline{N} v = 0 \tag{10}$$

mit

$$\overline{M}(x, y) = -\int_0^y \frac{\partial}{\partial x} M(\eta, x)\, d\eta, \qquad \overline{N}(x, y) = N(y, x) - \frac{\partial}{\partial x} M(y, x).$$

Ist nun $G_2(x, y; \eta)$ eine erzeugende Lösung der zweiten Art für (2), so ist

$$H_1(x, y; \xi) = G_2(y, x; \xi) \tag{11}$$

ein erzeugende Lösung der ersten Art für (10). In der Tat genügt $H_1$ der Gleichung (10), und ferner auch der Gleichung (6), mit $\overline{N}$ anstelle von $N$. Wenn $G_2$ bezüglich $x = 0$ ausgezeichnet ist, so ist jetzt $H_1$ bezüglich $y = 0$ ausgezeichnet. Auf Grund dieser Tatsachen braucht man nur noch von erzeugenden Lösungen der ersten Art zu sprechen und kann die Indizes 1 und 2 auslassen. Die folgenden erzeugenden Lösungen werden wir zu benutzen haben:

$$\begin{cases} G(x, y; \xi) = G_1(x, y; \xi), & H(y, x; \eta) = G_2(x, y; \eta), \\ G'(x, y; \xi) = G_1'(x, y; \xi), & H'(y, x; \eta) = G_2'(x, y; \eta), \end{cases} \tag{12}$$

wo $G'$, $H'$ erzeugende Lösungen (der ersten Art) für die zu (2) und (10) adjungierten Differentialgleichungen sind. Im allgemeinen sind so vier Funktionen zu berechnen, es kann aber sein, daß einige von ihnen oder sogar alle zusammenfallen.

### 3. Die inverse Integraltransformation zu (3) und (4).

Die folgenden Rechnungen wurden im Falle von Differentialgleichungen von elliptischem Typ in [5] durchgeführt, sie sind hier aber zu wiederholen, da dort von der Möglichkeit gewisser Reihenentwicklungen Gebrauch gemacht wurde, die hier i. a. nicht mehr zutrifft. Die Voraussetzung, daß $G$, $H$, $G'$, $H'$ ausgezeichnet seien, ist zunächst noch nicht nötig.

Wir gehen von einem Integral

$$v' = \varphi(x) - \int_0^x G'(x, y; \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{13}$$

der zu (2) adjungierten Differentialgleichung aus, wobei $\varphi(x)$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion ist. $C$ sei eine glatte Kurve, welche die Punkte

$$O\colon\ x = 0,\ y = 0 \quad \text{und} \quad P\colon\ x = \xi_1,\ y = \eta_1$$

verbindet; sie sei gegeben durch $y = y(x)$, und es sei $y' = dy/dx$. Nach dem Greenschen Integralsatz ist nun das über $C$ erstreckte Integral

$$U(P) = \int_0^P [(u_x v' - u v'_x + 2 M u v')\, dx - (u_y v' - u v'_y)\, dy]$$

von $C$ unabhängig für jede stetige und zweimal stetig differenzierbare Lösung $u$ von (2). Dies Integral kann so geschrieben werden:

$$U(P) = \int_0^{\xi_1} (u_x v' - u v'_x + 2 M u v' - (u_y v' - u v'_y)\, y')\, dx. \tag{14}$$

Setzt man (13) ein und benutzt die Abkürzung $G'(x, y; x) = A'(x, y)$, so wird

$$U(P) = \int_0^{\xi_1} (u_x \varphi(x) - u \varphi'(x) + (2M + A')\, u \varphi(x) + u_y \varphi(x)\, y')\, dx$$

$$- \int_0^{\xi_1} dx \int_0^x (u_x G' - u G'_x + 2 M u G' - (u_y G' - u G'_y)\, y')\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

wo $G' = G'(x, y; \xi)$. Das Doppelintegral kann partiell integriert werden: es ist von der Form

$$\int_0^{\xi_1} dx \int_0^x K(x, \xi)\, d\xi = \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_1} K(x, \xi)\, dx\, d\xi - \int_0^{\xi_1} d\xi \int_0^{\xi} K(x, \xi)\, dx.$$

Wenn wir diese Regel auf $U(P)$ anwenden, tritt u. a. das Integral

$$\int_0^{\xi_1} (u_x G' - u G'_x + 2 M u G' - (u_y G' - u G'_y)\, y')\, dx$$

auf, welches nach dem Greenschen Integralsatz vom Wege unabhängig ist. Jetzt erweist sich auch folgendes Integral als wegunabhängig:

$$\overline{U}(P) = \int_0^{\xi_1} \varphi(x)\, V(x)\, dx \tag{15}$$

mit

$$V(x) = 2u_x + u_y y' + (2M + A')\, u + \left[\int_0^x (u_x G' - u G'_x + 2M u G' - (u_y G' - u G'_y)\, y')\, dx\right]_{\xi = x}.$$

Die Wegunabhängigkeit von (15) war für beliebige stetig differenzierbare Funktionen $\varphi(x)$ bewiesen worden. Durch Grenzübergang folgt aber sofort, daß (15) wegunabhängig ist sogar für alle stückweise stetigen $\varphi(x)$. Wir setzen nun (15) für zwei Wege $C_1$ und $C_2$ von $O$ nach $P$ an und bilden die Differenz

$$\int_0^{\xi_1} (V(x, C_1) - V(x, C_2))\, \varphi(x)\, dx = 0,$$

wobei die formale Abhängigkeit von $V(x)$ von diesen Wegen zum Ausdruck gebracht wird. Es sei $0 < x_1 < \xi_1$, und für $\varphi(x)$ setze man ein:

$$\varphi(x) = \begin{cases} V(x, C_1) - V(x, C_2) & \text{für } x < x_1, \\ 0 & \text{für } x \geqq x_1. \end{cases}$$

Dann folgt: $V(x, C_1) = V(x, C_2)$ für $x < x_1$. Da $x_1$ beliebig $< \xi_1$ sein darf, ist hiernach $V(x)$ eine nur von $x$ abhängige Funktion, und dasselbe trifft dann auch für die Funktion $\overline{U}(P)$ zu: sie ist nur noch von $\xi_1$ abhängig: $\overline{U}(P) = 2F_1(\xi_1)$. Im Falle $\varphi(x) = 1$ wird

$$F_1(\xi_1) = \tfrac{1}{2}\left\{u(\xi_1, \eta_1) - u(0, 0) + \int_0^{\xi_1} (u_x + (2M + A')\, u)\, dx + \int_0^{\xi_1} dx \left[\int_0^x (u_x G' - u G'_x + 2M u G' - (u_y G' - u G'_y)\, y')\, dx\right]_{\xi = x}\right\}.$$

Setzt man nun

$$\tilde{G}'(x, y; \xi) = 1 - \int_{\xi}^{x} G'(x, y; \zeta)\, d\zeta \tag{16}$$

und vergleicht den Ausdruck für $F_1(\xi_1)$ mit

$$\left[\int_0^{\xi_1} (u_x \tilde{G}' - u \tilde{G}'_y + 2M u \tilde{G}' - (u_y \tilde{G}' - u \tilde{G}'_y) y')\, dx\right]_{\xi = \xi_1} = \int_0^{\xi_1} (u_x + (2M + A')\, u)\, dx - \int_0^{\xi_1} dx \int_{\xi_1}^{x} (u_x G' - u G'_x + 2M u G' - (u_y G' - u G'_y)\, y')\, d\xi,$$

was nach partieller Integration in

$$= \int_0^{\xi_1} (u_x + (2M + A')\, u)\, dx$$

$$+ \int_0^{\xi_1} dx \left[ \int_0^{x} (u_\xi G' - u G'_\xi + 2M u G' - (u_y \tilde{G}' - u \tilde{G}'_y)\, y')\, dx \right]_{\xi = x}$$

übergeht, so erhält man endlich *die von $\eta_1$ unabhängige Funktion*

$$F_1(\xi_1) = \tfrac{1}{2} \Big\{ u(\xi_1, \eta_1) - u(0, 0)$$

$$+ \left[ \int_0^{P(\xi_1, \eta_1)} [(u_x \tilde{G}' - u \tilde{G}'_x + 2M u \tilde{G}')\, dx - (u_y \tilde{G}' - u \tilde{G}'_y)\, dy] \right]_{\xi = \xi_1} \Big\}. \tag{17}$$

Der Integraloperator (17) wird sich als zu (3) invers herausstellen; es gibt noch einen anderen, der im gleichen Sinne zu (4) invers ist. Man erhält diesen, wenn man dieselben Rechnungen unter Zugrundelegung von (10) anstelle von (2) durchführt:

$$F_2(\eta_1) = \tfrac{1}{2} \Big\{ v(\xi_1, \eta_1) - v(0, 0)$$

$$+ \left[ \int_0^{P(\xi_1, \eta_1)} [(v_y \tilde{H}' - v \tilde{H}'_y + 2M' v \tilde{H}')\, dy - (v_x H' - v \tilde{H}'_x)\, dx] \right]_{\eta = \eta_1} \Big\}. \tag{18}$$

wo $v$ die Funktion (9) ist und

$$\tilde{H}' = \tilde{H}'(y, x; \eta) = 1 - \int_\eta^y H'(y, x; \xi)\, d\xi. \tag{19}$$

## 4. Die Lösung des Cauchyschen Problems.

Es sei eine glatte Kurve $C$ gegeben, welche nirgends in einer der charakteristischen Richtungen verläuft. Gefragt wird nach einer Lösung $u$ von (2), für welche $u$ und die ersten partiellen Ableitungen von $u$ auf $C$ vorgeschriebene Werte annehmen. Wir setzen sie in der Form

$$u = u_1 + u_2 \tag{20}$$

an, wo $u_1$ und $u_2$ durch (3) und (4) definiert sind. Die Koordinaten seien so gewählt, daß $C$ durch den Punkt $x = y = 0$ geht. Das allgemeine Cauchysche Problem läßt sich in dieses spezielle überführen[1]). Da man mittels (3) leicht eine Lösung konstruieren kann, welche im Nullpunkt einen vorgeschriebenen Wert $u(0, 0)$ annimmt, beschränkt es die Allgemeinheit nicht, wenn $u(0, 0) = 0$ verlangt wird. Nun gilt der Satz:

*Der Punkt $x = y = 0$ liege auf $C$, und es sei hier $u(0, 0) = 0$ vorgeschrieben. $G$, $H$, $G'$, $H'$ seien die erzeugenden Lösungen für* (2), (10), *und die hierzu adjungierten Differentialgleichungen, welche bezüglich $x = 0$ bzw. $y = 0$ ausgezeichnet sind. Dann kann die Lösung $u$ des* Cauchyschen *Problems als die Summe* (20) *von Integralen* (3) *und* (4) *geschrieben werden, wobei für $f_1(x)$, $f_2(y)$ die durch* (17) *und* (18) *definierten Funktionen $F_1(x)$, $F_2(y)$ einzusetzen sind.*

Wir beweisen zuerst: ist $u$ gleich der Summe (20), und ist $f_1(0) = f_2(0) = 0$, dann ist $f_1 = F_1$ und $f_2 = F_2$. Weil $G$ ausgezeichnet ist, gilt nach (3)

$$u_1(x, 0) = f_1(x),$$

und weil $\tilde{G}'$ ausgezeichnet ist, folgt aus (16): $G'(x, 0; \xi) = 1$. Da endlich $M(x, 0) = 0$ angenommen werden sollte, ist

$$F_1(\xi_1) = u_1(\xi_1, 0) = f_1(\xi_1).$$

Genau so wird $F_2(\eta_1) = f_2(\eta_1)$ bewiesen.

Zweitens ist zu zeigen, daß jede Lösung $u$ von (2) mit der Eigenschaft $u(0, 0) = 0$ in der Gestalt (20) oder

$$(21)\qquad u(x, y) = f_1(x) - \int_0^x G_1(x, y; \xi)\, f_1(\xi)\, d\xi + \left(f_2(y) - \int_0^y G_2(x, y; \eta)\, f_2(\eta)\, d\eta\right) \exp\left(-\int_0^x M(\xi, y)\, d\xi\right)$$

geschrieben werden kann, wobei

$$(22)\qquad f_1(0) = f_2(0) = 0$$

ist. Wir bemerken hierzu zunächst, daß $u$ eindeutig festgelegt ist, wenn die Werte von $u$ und $u_x$ auf einer Kurve $C$ mit obigen Eigenschaften vorgeschrieben sind; $u_y$ läßt sich dann auf $C$ aus $u$ und $u_x$ berechnen. Nun ist

$$(23)\qquad \begin{aligned} u_x(x, y) = {} & f_1'(x) - G_1(x, y; x)\, f_1(x) - \int_0^x G_{1x}(x, y; \xi)\, f_1(\xi)\, d\xi \\ & - \left[\left(f_2(y) - \int_0^y G_2(x, y; \eta) f_2(\eta)\, d\eta\right) M(x, y) \right. \\ & \left. + \int_0^y G_{2x}(x, y; \eta)\, f_2(\eta)\, d\eta\right] \exp\left(-\int_0^x M(\xi, y)\, d\xi\right). \end{aligned}$$

Ist $C$ durch $y = y(x)$ gegeben, so liefert (21) eine Integralgleichung vom Typus

$$(24)\qquad u_1(x) = f_1(x) - \int_0^x G_1(x, \xi)\, f_1(\xi)\, d\xi + f_2(x) - \int_0^x H_1(x, \xi)\, f_2(\xi)\, d\xi,$$

wobei wir uns nur die Bedeutung von $u_1(x) = u(x, y(x))$ und

$$f_2(x) = f_2(y(x)) \exp\Big( - \int_0^x M(\xi, y(x))\, d\xi \Big)$$

zu merken haben. Eine ähnliche Integralgleichung erhält man, wenn (23) unbestimmt integriert wird:

$$(25) \qquad u_2(x) = f_1(x) - \int_0^x G_2(x, \xi) f_1(\xi)\, d\xi - \int_0^x H_2(x, \xi) f_2(\xi)\, d\xi$$

mit $u_2(x) = \int_0^x u_1(\xi, y(\xi))\, d\xi$. Das System (24), (25) wird symmetrischer, wenn man (24) ersetzt durch

$$(26) \qquad u_3(x) = - \int_0^x G_3(x, \xi) f_1(\xi)\, d\xi + f_2(x) - \int_0^x H\ (x, \xi) f_2(\xi)\, d\xi$$

mit $u_3 = u_1 - u_2$, $G_3 = G_1 - G_2$, $H_3 = H_1 - H_2$. Die Integralgleichungen (25), (26) sind vom Volterraschen Typ und können so behandelt werden, wie eine Volterrasche Integralgleichung für eine unbekannte Funktion; nämlich durch Iteration, ausgehend von $f_1(x) \approx u_2(x)$, $f_2(x) \approx u_3(x)$. Man erhält so in der Tat eine Lösung von (21), (23) mit der Nebenbedingung (22).

## 5. Schlussbemerkungen.

Die Aufspaltung (20) der allgemeinen Lösung von (2) kann man sich an einem Beispiel veranschaulichen: Es entstehe (2) durch Umformung der Schwingungsgleichung $c^2 u_{rr} - u_{tt} = 0$ für ein nicht homogenes eindimensionales Medium mit der räumlichen Koordinate $r$. Dann sind die Koordinaten der Normalform (2)

$$x = \int \frac{dr}{c} + t, \qquad y = \int \frac{dr}{c} - t.$$

$u_1$ und $u_2$ stellen in diesem Falle Wellen dar, die in entgegengesetzten Richtungen verlaufen. Die bekannte Tatsache, daß sich Singularitäten einer Lösung „längs der Charakteristiken fortpflanzen", wird hierdurch instruktiv beleuchtet.

Was die praktische Berechnung erzeugender Lösungen im Einzelfall betrifft, so macht dies keine Schwierigkeit, falls die Riemannsche Funktion bekannt ist [7]. Beispiele finden sich in [5], [6], wo erzeugende Lösungen für Differentialgleichungen von elliptischem Typ angegeben werden; man kann diese durch Einführung komplexer Koordinaten für den hyperbolischen Fall nutzbar machen. Über diese speziellen Beispiele hinaus gibt es zwei Transformationen allgemeinerer Art, die

noch mehr leisten. Die erste liefert aus einer erzeugenden Lösung für $u_{xy} + N_1 u = 0$ eine solche für $u_{xy} + N_2 u = 0$, wenn $N_2 = -N_1 - 8 v_x v_y v^{-2}$ mit einer partikulären Lösung $v$ der ersteren Differentialgleichung ist. Die zweite Transformation erlaubt die Berechnung einer erzeugenden Lösung für $u_{xy} + (N_1(x-y) + N_2(x+y))\, u = 0$ aus denen für $u_{xy} + N_1(x-y)\, u = 0$ und $u_{xy} + N_2(x+y)\, u = 0$. Vgl. hierzu [5], [6].

Hat man eine erzeugende Lösung erster Art $G_1(x, y; \xi)$ überhaupt, so erhält man weitere in der Form

$$\overline{G}_1(x, y; \xi) = G_1(x, y; \xi) - K(x, \xi) + \int_{\xi}^{x} G_1(x, y; t)\, K(t, \xi)\, dt,$$

wobei $K(x, \xi)$ eine beliebige stetige Funktion ist. Soll $\overline{G}_1$ ausgezeichnet sein, so muß $K$ der Integralgleichung

$$K(x, \xi) - \int_{\xi}^{x} G_1(x, 0; t)\, K(t, \xi)\, dt = G_1(x, 0; \xi)$$

genügen.

Endlich sei bemerkt, daß zur Lösung des Cauchyschens Problems gar nicht immer ausgezeichnete erzeugende Lösungen erforderlich sind. Es kann nämlich sein, daß der oben bewiesene Satz anwendbar ist, ohne daß $G$, $G'$, $H$, $H'$ ausgezeichnet sind. Ein Beispiel liefert die Differentialgleichung $u_{xy} + \lambda(x+y)^{-2} u = 0$, wo

$$G = G' = H = H' = \frac{1}{x+y}\, h\left(\frac{x-\xi}{x+y}\right)$$

ist, wenn $-\lambda^{-1} h$ die hypergeometrische Funktion mit den Parametern

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{1 - 4\lambda}), \qquad \beta = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{1 - 4\lambda}), \quad \gamma = 2$$

bezeichnet.

## Literaturverzeichnis.

Wir zitieren hier nur einige Arbeiten, welche Differentialgleichungen von elliptischem Typ behandeln.

S. Bergmann.

[1] Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen. Rec. Math. Moscou (2), vol. 2, 1169—1198, 1937.

[2] Linear operators in the theory of partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 53, 130—155, 1943.

[3] Certain Classes of analytic functions in two real variables and their properties, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 57, 299—331, 1945.

[4] The determination of some properties of a function satisfying a partial differential equation from its series development, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 50, 535 — 546, 1944.

M. Eichler.

[5] Allgemeine Integration linearer partieller Differentialgleichungen von elliptischem Typ bei zwei Grundvariablen, Abh. Math. Seminar Hamburg Univ. vol. 15, 179—210, 1947.

[6] On the differential equation $u_{xx} + u_{yy} + N(x)\,u = 0$, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 65, 259—278, 1949.

H. Cohn.

[7] The Riemann Funktion for $\frac{\partial^2 u}{\partial_x \partial_y} + H(x+y)\,u = 0$ Duke Math. J. vol. 14, 297—304, 1947.

(Eingegangen am 15. Juli 1949.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 1, S. 11—20 (1950).

# Zur Algebra der orthogonalen Gruppen.

Von

**Martin Eichler** in Münster.

## Einleitung und Ergebnisse.

Scheinbar so völlig getrennte Forschungsgebiete der Algebra und Zahlentheorie wie die algebraischen Zahlkörper, die einfachen Algebren und die quadratischen Formen, haben nicht nur ihren Ausgangspunkt gemeinsam: nämlich die klassische Theorie der binären quadratischen Formen. Neuere Untersuchungen [1]) haben gezeigt, daß zahlreiche innere Verwandtschaften bestehen. Den Grund hierfür kann man in dem Umstand sehen, daß im Mittelpunkt dieser Theorien (teils offen, teils verborgen) gewisse einfache kontinuierliche Gruppen stehen, nämlich die (multiplikative) zyklische Gruppe im Falle der Zahlkörper, die lineare Gruppe im Falle der einfachen nicht kommutativen Algebren, und die orthogonale Gruppe im Falle der quadratischen Formen. Die Auszeichnung, die die multiplikative Gruppe der Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers vor der additiven in der Klassenkörpertheorie erfährt, ist auffällig. Im Falle der quadratischen Formen ist es ganz natürlich, daß die Gruppe der linearen Substitutionen, die eine Form fest lassen, das wahre Wesen der Formen widerspiegelt. Es ist demnach die Aufgabe der Algebra und Zahlentheorie, die durch die Multiplikation $A(r_1, \ldots) A(s_1, \ldots) = A(t_1, \ldots)$ in den genannten Gruppen zwischen den freien Parametern $r_1, \ldots, s_1, \ldots, t_1, \ldots$ gestifteten algebraischen Gleichungen zu erforschen und mit begrifflichem Inhalt zu füllen, wobei die Werte der Parameter aus gewissen Körpern genommen werden.

Von besonderem Interesse sind die Querverbindungen, die sich dabei ergeben. An früherer Stelle [2]) habe ich auf eine Beziehung zwischen quadratischen Formen und algebraischen Zahlkörpern hingewiesen. Dort war mir jedoch ein Irrtum unterlaufen, demzufolge die letztgenannten Überlegungen nur für solche Formen stichhaltig sind, welche die Null nicht eigentlich darstellen. Wir wollen hier diese Überlegungen weiterführen.

---

[1]) M. Eichler, Grundzüge einer Zahlentheorie der quadratischen Formen im rationalen Zahlenkörper, Teil I: Comment. Math. Helvetici vol 20, 9—60, 1947, Teil II: ibd. vol 21, 1—28, 1948.

[2]) s. [1]), Teil II, § 12.

Ein für alle mal soll folgendes vorausgesetzt werden: *die zu betrachtende Form* $\mathfrak{F}$ *stellt die Null in dem zu Grunde liegenden Körper* $k$ *nicht eigentlich dar. Die Charakteristik von* $k$ *ist* $\neq 2$. Wir wollen uns der üblichen Matrizensymbolik bedienen, wonach $\mathfrak{F}$ als eine symmetrische Matrix mit nicht verschwindender Determinante geschrieben wird. Die Reihenzahl sei durchwegs $n$. Die linearen Substitutionen, die $\mathfrak{F}$ invariant lassen, werden dann durch Matrizen $\mathfrak{T}$ dargestellt, welche die Gleichung

$$\dot{\mathfrak{T}}\mathfrak{F}\mathfrak{T} = \mathfrak{F}$$

befriedigen; mit einem Punkt wird die gespiegelte Matrix bezeichnet. Wir wollen sagen, $\mathfrak{T}$ ist eine $\mathfrak{F}$-*orthogonale* (kurz: $\mathfrak{F}$-o.) Matrix.

Für eine beliebige $n$-reihige Matrix $\mathfrak{M}$ werde

$$\mathfrak{M}^{(\mathfrak{F})} = \mathfrak{F}^{-1}\dot{\mathfrak{M}}\mathfrak{F} \tag{1}$$

gesetzt. (1) ist ein Antiautomorphismus im Ring aller $n$-reihigen Matrizen, wir wollen ihn mit $(\mathfrak{F})$ bezeichnen. Es werden nun kommutative Ringe $R$ von Matrizen betrachtet, die durch $(\mathfrak{F})$ als Ganzes in sich übergehen. $(\mathfrak{F})$ definiert dann in einem solchen Ring $R$ einen Automorphismus der Ordnung 2; wir wollen deshalb von $\mathfrak{F}$-*automorphen* (kurz $\mathfrak{F}$-a.) *Ringen* sprechen. Wie sich ergeben wird, hat die Voraussetzung, daß $\mathfrak{F}$ die Null nicht eigentlich darstellt, zur Folge, daß ein $\mathfrak{F}$-a. Ring stets halbeinfach ist. Falls es jedoch nichttriviale Nulldarstellungen durch $\mathfrak{F}$ gibt, braucht dies nicht mehr der Fall zu sein, und die Verhältnisse werden unübersichtlicher.

Ist $\mathfrak{M}$ eine nicht singuläre Matrix aus einem $\mathfrak{F}$-a. Ring, so ist

$$\mathfrak{T} = (\mathfrak{M}^{(\mathfrak{F})})^{-1}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{1-(\mathfrak{F})} \tag{2}$$

eine $\mathfrak{F}$-o. Matrix. Ist $\mathfrak{T}$ gegeben, und hat $\mathfrak{T}$ nicht $-1$ als charakteristische Wurzel, so gilt (2) bekanntlich mit

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{E} - (\mathfrak{E} + \mathfrak{T})^{-1}(\mathfrak{E} - \mathfrak{T}).$$

Dabei ist $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix. Aus (2) folgt für eine solche Matrix $|\mathfrak{T}| = 1$. Unser erstes Ziel ist

Satz 1. *Jede* $\mathfrak{F}$-*o. Matrix* $\mathfrak{T}$ *der Determinante 1 läßt sich in der Weise* (2) *darstellen.*

Den allgemeinsten $\mathfrak{F}$-a. Ring erhält man durch sukzessive Auflösung einer Anzahl von Systemen linearer Gleichungen, wobei die Lösungen des 1. bis $i$. Systems in die Koeffizienten des $(i+1)$. Systems mit eingehen. Bei jedem System bleiben einige Parameter frei verfügbar. Somit ist (2) eine ausnahmslos gültige Parameterdarstellung der $\mathfrak{F}$-o. Matrizen.

Die Frage, in welcher Beziehung verschiedene mit einander isomorphe $\mathfrak{F}$-a. Ringe stehen, wird in den beiden folgenden Sätzen teilweise beantwortet:

Satz 2. *Sind $R_1$ und $R_2$ zwei ($\mathfrak{F}$)-operatorisomorphe $\mathfrak{F}$-a. Ringe, so gibt es eine $\mathfrak{F}$-o. Matrix $\mathfrak{S}$ mit Elementen aus einer algebraischen Erweiterung von $k$, so daß*

$$R_2 = \mathfrak{S}^{-1} R_1 \mathfrak{S} \tag{3}$$

*ist. Die Gleichung* (3) *ist elementweise zu verstehen, d. h. besteht die $\mathfrak{F}$-Operatorisomorphie in der Zuordnung $\mathfrak{R}_1 \longleftrightarrow \mathfrak{R}_2$ eines Elementes $\mathfrak{R}_1$ aus $R_1$ zu einem Element $\mathfrak{R}_2$ aus $R_2$, so gilt durchweg $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{R}_1 \mathfrak{S}$.*

Satz 3. *Haben $R_1$ und $R_2$ den Rang $n$ und ist $k$ ein algebraischer Zahlkörper, so gibt es ein solches $\mathfrak{S}$ mit Elementen aus $k$ dann und nur dann, wenn dies für jede $\mathfrak{p}$-adische Erweiterung von $k$ der Fall ist.*

Diese Sätze stellen eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Wedderburn dar. Wenn nämlich $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ zwei $\mathfrak{F}$-o. Matrizen mit gleichen charakteristischen Zahlen sind, so wird behauptet, daß sie sich in einem Oberkörper von $k$ stets, und unter gewissen Voraussetzungen sogar in $k$ durch eine $\mathfrak{F}$-o. Matrix $\mathfrak{S}$ in einander transformieren lassen. Sie enthalten ferner eine Aussage über $\mathfrak{F}$-o. Transformierbarkeit zweier Formen in einander.

Satz 3 wird sich als eine Folgerung aus dem Normensatz für relativ-quadratische Zahlkörper herausstellen, und auch umgekehrt kann man den letzteren Satz aus ersterem leicht herleiten. Unsere Überlegungen liefern damit eine Abbildung der Theorie der relativ-quadratischen Zahlkörper über einem Körper $K$ auf die Formentheorie in einem Unterkörper $k$ von $K$. In speziellen Fällen hat es sich gezeigt, daß auch das quadratische Reziprozitätsgesetz in $K$ auf eine Aussage über quadratische Formen in $k$ abgebildet werden kann. An dieser Stelle wollen wir uns allerdings mit diesem kurzen Hinweis begnügen.

## Beweis für Satz 1.

Hilfssatz 1. Jeder $\mathfrak{F}$-a. Ring $R$ ist halbeinfach.

Beweis. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Matrix aus $R$ mit $\mathfrak{R}^2 = 0$. Dann ist auch $(\mathfrak{R} \overset{\mathfrak{F}}{\cdot} \mathfrak{R})^2 = 0$, d. h. wegen $|\mathfrak{F}| \neq 0$: $\dot{\mathfrak{R}} \mathfrak{F} \mathfrak{R} \mathfrak{F}^{-1} \dot{\mathfrak{R}} \mathfrak{F} \mathfrak{R} = (\dot{\mathfrak{R}} \mathfrak{F} \mathfrak{R}) \mathfrak{F}^{-1} (\dot{\mathfrak{R}} \mathfrak{F} \mathfrak{R}) = 0$. Also $\dot{\mathfrak{R}} \mathfrak{F} \mathfrak{R}$ transformiert die Form $\mathfrak{F}^{-1}$ in die Nullform. $\mathfrak{F}^{-1}$ ist mit $\mathfrak{F}$ verwandt und stellt daher voraussetzungsgemäß die Null nicht eigentlich dar. Daher muß $\dot{\mathfrak{R}} \mathfrak{F} \mathfrak{R} = 0$ sein. Ebenso folgt dann $\mathfrak{R} = 0$, q. e. d.

Wir wollen jetzt zunächst ein Verfahren angeben, nach dem alle $\mathfrak{F}$-a. Ringe berechnet werden können. Ein trivialer $\mathfrak{F}$-a. Ring besteht aus den Vielfachen der Einheitsmatrix. Dieser kann jedoch stets erweitert werden.

Hilfssatz 2. Jeder $\mathfrak{F}$-a. Ring $R_0$ ist in einem $\mathfrak{F}$-a. Ring $R$ vom Rang $n$ enthalten.

Beweis. Wenn $R_0$ noch nicht den Rang $n$ hat, so gibt es stets eine nicht schon in $R_0$ enthaltene Matrix $\mathfrak{H}$, die mit allen in $R_0$ enthaltenen Matrizen vertauschbar ist. Da die Charakteristik $\neq 2$ sein sollte, kann man sie in eindeutiger Weise so zerlegen:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2, \quad \mathfrak{H}_1^{(\mathfrak{S})} = \mathfrak{H}_1, \quad \mathfrak{H}_2^{(\mathfrak{S})} = -\mathfrak{H}_2.$$

Jetzt ist

$$(\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2)\,\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2),$$

$$((\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2)\,\mathfrak{R})^{(\mathfrak{S})} = (\mathfrak{R}(\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2))^{(\mathfrak{S})} = (\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_2)\,\mathfrak{R}^{(\mathfrak{S})} = \mathfrak{R}^{(\mathfrak{S})}(\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_2)$$

für jedes $\mathfrak{R}$ aus $R_0$; also auch

$$\mathfrak{H}_1\mathfrak{R} = \mathfrak{R}\mathfrak{H}_1, \quad \mathfrak{H}_2\mathfrak{R} = \mathfrak{R}\mathfrak{H}_2.$$

$\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ sind nicht beide schon in $R_0$ enthalten, durch Adjunktion von einer dieser Matrizen zu $R_0$ entsteht eine Erweiterung $R_1$, die wieder $\mathfrak{F}$-a. ist. Das Verfahren bricht erst dann ab, wenn man bei einem Ring vom Rang $n$ angekommen ist. Es besteht im Aufsuchen von Matrizen $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H}R = R\mathfrak{H}$, was auf die Auflösung linearer Gleichungen hinausläuft, wie in der Einleitung gesagt wurde.

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis für Satz 1 und dürfen uns dabei auf den Ausnahmefall beschränken, wo mindestens eine charakteristische Wurzel von $\mathfrak{T}$ gleich $-1$ ist. Da nach Hilfssatz 1 der $\mathfrak{F}$-a. Ring $k[\mathfrak{E}, \mathfrak{T}, \mathfrak{T}^2, \ldots]$ halbeinfach ist, kann man $\mathfrak{T}$ in $k$ so ausreduzieren:

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{T}\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} -\mathfrak{E}_1 & \\ & \mathfrak{T}_2 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathfrak{E}_1$ die Einheitsmatrix einer Reihenzahl $n_1$ ist und $\mathfrak{T}_2$ eine $(n - n_1)$-reihige Matrix, welche nicht $-1$ als eine charakteristische Wurzel hat. $\mathfrak{T}'$ ist dann $\mathfrak{F}'$-o. für $\mathfrak{F}' = \dot{\mathfrak{S}}\mathfrak{F}\mathfrak{S}$. Es beschränkt also nicht die Allgemeinheit, wenn man $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{F}'$ ersetzt oder $\mathfrak{T}$ bereits als ausreduziert annimmt. Es werde $\mathfrak{F}$ in entsprechender Weise in Kästchen unterteilt:

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_{11} & \mathfrak{F}_{12} \\ \mathfrak{F}_{12} & \mathfrak{F}_{22} \end{pmatrix} = \dot{\mathfrak{T}}\mathfrak{F}\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_{11} & -\mathfrak{F}_{11}\mathfrak{T}_2 \\ -\dot{\mathfrak{T}}_2\mathfrak{F}_{12} & \dot{\mathfrak{T}}_2\mathfrak{F}_{22}\mathfrak{T}_2 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt zunächst, da $\mathfrak{T}_2$ nicht $-1$ als charakteristische Wurzel hat,

$$\mathfrak{F}_{12} = 0,$$

also $\mathfrak{F}$ zerspaltet sich in zwei variablenfremde Teilformen $\mathfrak{F}_{11}$ und $\mathfrak{F}_{22}$. Alle Matrizen der Form

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1 & \\ & \mathfrak{M}_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

verhalten sich bei $(\mathfrak{F})$ so, wie wenn auf $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ simultan die Operatoren $(\mathfrak{F}_{11})$ und $(\mathfrak{F}_{22})$ angewandt werden. Man sieht ferner, daß $\mathfrak{T}_2$ eine $\mathfrak{F}_{22}$-o. Matrix ist. Daraus folgt auf Grund der in der Einleitung erwähnten Parameterdarstellung der orthogonalen Matrizen

$$\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{M}_2^{1-(\mathfrak{F}_{22})} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{E}_2 - (\mathfrak{E}_2 + \mathfrak{T}_2)^{-1}(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{T}_2),$$

wo $\mathfrak{E}_2$ die $(n - n_1)$-reihige Einheitsmatrix ist. Demnach ist $|\mathfrak{T}_2| = 1$. Da $|\mathfrak{T}| = 1$ angenommen wurde, ist somit die Reihenzahl $n_1$ von $\mathfrak{E}_1$ gerade.

Man kann nun, da die Charakteristik von $k$ nicht $= 2$ ist, $\mathfrak{F}_{11}$ auf Diagonalgestalt transformieren. Wieder beschränkt es die Allgemeinheit nicht, wenn man bereits

$$\mathfrak{F}_{11} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{n_1} \end{pmatrix}$$

in Diagonalform annimmt. Man setze nun

$$\mathfrak{M}_1 = \begin{pmatrix} & d_2 & & & \\ -d_1 & & d_3 & & \\ & -d_2 & & \ddots & \\ & & \ddots & & d_{n_1} \\ & & & -d_{n_1-1} & \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathfrak{M}_1^{(\mathfrak{F}_{11})} = -\mathfrak{M}_1$ und $|\mathfrak{M}_1| \neq 0$, also $-\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{M}_1^{1-(\mathfrak{F}_{11})}$. Schließlich gilt (2) mit der Matrix (4), wenn $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ die soeben erklärte Bedeutung haben.

## Beweis für Satz 2.

Nach Hilfssatz 1 kann man die Matrizen $\mathfrak{R}$ aus $R_1$ durch eine Matrix $\mathfrak{S}_1$ mit Elementen aus einem Oberkörper $k'$ von $k$ simultan auf Diagonalform transformieren; wir ersetzen dann $R_1$ durch $R_1' = \mathfrak{S}_1^{-1} R_1 \mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{F}_1' = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{F} \mathfrak{S}_1$. Es sei $\mathfrak{R}_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ eine Basis von $R_1'$ und

$$\mathfrak{X}' = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathfrak{R}_i' = \begin{pmatrix} \xi_1 \mathfrak{E}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \xi_m \mathfrak{E}_m \end{pmatrix}$$

das allgemeine Element von $R_1'$. Dabei seien $\mathfrak{E}_1, \ldots$ Einheitsmatrizen der Reihenzahlen $n_1, \ldots$. $R_1'$ ist $\mathfrak{F}_1'$-o., d. h. bei dem Automorphismus $(\mathfrak{F}_1')$ permutieren sich die $\xi_i$. Und zwar mögen $\xi_1, \ldots, \xi_r$ fest bleiben und $\xi_i$ mit $\xi_{i+s}$ vertauscht werden für $i = r+1, \ldots, r+s$; in dieser Numerierung ist also $r + 2s = m$. Es werde $\mathfrak{F}_1'$ in entsprechender

Weise in Kästchen aufgeteilt:

$$\mathfrak{F}_1' = (\mathfrak{f}_{ik}),$$

wobei $\mathfrak{f}_{ik}$ eine Matrix von $n_i$ Zeilen und $n_k$ Spalten ist.

Ist $\overline{\mathfrak{X}}'$ die Matrix, in deren Diagonalen der Reihe nach die Matrizen $\xi_1\mathfrak{E}_1, \ldots, \xi_r\mathfrak{E}_r, \xi_{r+s+1}\mathfrak{E}_{r+1}, \ldots, \xi_{r+2s}\mathfrak{E}_{r+s}, \xi_{r+1}\mathfrak{E}_{r+s+1}, \ldots, \xi_{r+s}\mathfrak{E}_{r+2s}$ und sonst nur Nullen stehen, so gilt jetzt $\overline{\mathfrak{X}}'\mathfrak{F}_1' = \mathfrak{F}_1'\mathfrak{X}'$. Daraus folgt

$$\mathfrak{f}_{ik}(\xi_i - \xi_k) = 0 \begin{cases} \text{für} & i = 1, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots, r \\ \text{und} & i = 1, \ldots, r; \quad k = 1, \ldots, m, \end{cases}$$

$$\mathfrak{f}_{ik}(\xi_{i+s} - \xi_k) = 0 \quad \text{für} \quad i, k = r+1, \ldots, m,$$

wenn anstelle von $i, k = m+1, \ldots, m+s$ geschrieben wird: $i, k = r+1, \ldots, r+s$. Wegen dieser Gleichungen hat $\mathfrak{F}_1'$ also folgende Gestalt:

$$\mathfrak{F}_1' = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & & \\ & & \mathfrak{H}_1 \\ & \mathfrak{H}_1 & \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathfrak{G}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{G}_{1r} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{H}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{H}_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{H}_{1s} \end{pmatrix},$$

wobei an nicht besetzten Stellen Nullen stehen und $\mathfrak{G}_{1i}$, $\mathfrak{H}_{1i}$ Matrizen der Reihenzahlen $n_1, \ldots, n_r$ und $n_{r+1} = n_{r+s+1}, \ldots, n_{r+s} = n_m$ sind, deren Determinanten nicht verschwinden.

In der gleichen Weise wird $R_2$ durch eine Matrix $\mathfrak{S}_2$ auf Diagonalform transformiert: $R_2' = \mathfrak{S}_2^{-1} R_2 \mathfrak{S}_2$, und zwar sind jetzt $R_1'$ und $R_2'$ identisch. Die Form $\mathfrak{F}_2' = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{F} \mathfrak{S}_2$ sieht dann so aus:

$$\mathfrak{F}_2' = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_2 & & \\ & & \mathfrak{H}_2 \\ & \mathfrak{H}_2 & \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathfrak{G}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_{21} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{G}_{2r} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{H}_{21} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{H}_{2s} \end{pmatrix}.$$

Die Reihenzahlen der $\mathfrak{G}_{2i}$, $\mathfrak{H}_{2i}$ sind gleich denen der $\mathfrak{G}_{1i}$, $\mathfrak{H}_{1i}$, und ihre Determinanten sind auch $\neq 0$. Es gibt nun eine Matrix $\mathfrak{S}'$ der Form

$$\mathfrak{S}' = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{S}_m \end{pmatrix}$$

mit Koeffizienten aus einem Erweiterungskörper $k''$ von $k'$, welche $\mathfrak{F}_1'$ in $\mathfrak{F}_2'$ transformiert, man braucht nämlich die $\mathfrak{S}_i$ nur so zu bestimmen, daß

$$\mathfrak{S}_i \mathfrak{G}_{1i} \mathfrak{S}_i = \mathfrak{G}_{2i} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, r$$

und

$$\mathfrak{S}_{r+i} \mathfrak{H}_{1i} \mathfrak{S}_{r+s+i} = \mathfrak{H}_{2i} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, s$$

ist. Die Matrix $\mathfrak{S}'$ ist mit allen Elementen aus $R_1' = R_2'$ vertauschbar. Mithin ist

$$(\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}' \mathfrak{S}_2^{-1})^{-1} R_1 (\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}' \mathfrak{S}_2^{-1}) = R_2, \quad (\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}' \mathfrak{S}_2^{-1})' \mathfrak{F} (\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}' \mathfrak{S}_2^{-1}) = \mathfrak{F},$$

d. h. (3) gilt mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}' \mathfrak{S}_2^{-1}$, und $\mathfrak{S}$ ist $\mathfrak{F}$-o.

## Beweis für Satz 3.

Es sei

$$\mathfrak{S}^{-1} R_1 \mathfrak{S} = R_2, \quad \mathfrak{S}' \mathfrak{F} \mathfrak{S} = \mathfrak{F} \tag{5}$$

und $K/k$ die kleinste Galoissche Erweiterung, welche alle Elemente von $\mathfrak{S}$ enthält. Die Galoissche Gruppe von $K/k$ sei $\Gamma = \{\varrho, \sigma, \tau, \ldots\}$. Offenbar genügt auch $\mathfrak{S}^\sigma$ (Anwendung des Automorphismus $\sigma$ auf alle Elemente von $\mathfrak{S}$) beiden Gleichungen (5), also ist

$$\mathfrak{S}^\sigma = \mathfrak{G}_\sigma \mathfrak{S} \tag{6}$$

mit einer $\mathfrak{F}$-o. Matrix $\mathfrak{G}_\sigma$, die mit allen Matrizen aus dem Ring $R_1$ vertauschbar ist. Aus (6) folgt

$$\mathfrak{G}_{\sigma\tau} = \mathfrak{G}_\sigma^\tau \mathfrak{G}_\tau . \tag{7}$$

Es sei $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ eine Basis von $K/k$ und $\mathfrak{G}_\sigma = \sum \varkappa_i \mathfrak{G}_{i\sigma}$, wobei die $\mathfrak{G}_{i\sigma}$ Elemente in $k$ haben. $A$ sei der aus allen $\mathfrak{G}_{i\sigma}$ erzeugte Matrizenring. Wie wir sahen, sind die Elemente von $A$ mit denen von $R_1$ vertauschbar. $A$ ist ferner $\mathfrak{F}$-a., denn es gilt $\mathfrak{F}^{-1} \mathfrak{G}_\sigma' \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\sigma^{-1}$, d. h. nach Erweiterung des Grundkörpers zu $K$ wird $A$ jedenfalls $\mathfrak{F}$-a., und es ist leicht einzusehen, daß diese Eigenschaft vom Grundkörper nicht abhängt. Nach Hilfssatz 1 ist mithin $A$ halbeinfach.

Wir bilden nun das verschränkte Produkt $B$ von $K/k$ mit seiner Galoisgruppe $\Gamma$ und dem Einheitsfaktorensystem und endlich das direkte Produkt $C = A \times B$. Auf Grund von (7) bilden die Elemente $u_\sigma = \sigma \mathfrak{G}_\sigma$ in $C$ eine zu $\Gamma$ isomorphe Gruppe, und die Elemente $u_\sigma \varkappa_i$ bilden eine Basis einer zu $B$ isomorphen Teilalgebra $B'$ von $C$, wenn die Multiplikationsregel $\varkappa_i u_\sigma = u_\sigma \varkappa_i^\sigma$ benutzt wird. Nach einem bekannten Satze[3]) gibt es jetzt in $C$ ein Element $\gamma$, welches

[3]) M. Deuring, Algebren, Ergebn. d. Math. IV, 1., p. 42. Satz 3. Dieser nur für einfache Algebren $B$ und $C$ formulierte Satz gilt ebenso für halbeinfaches $C$, wenn nur $B$ einfach und $BC = C$ ist. Beide Bedingungen sind erfüllt, die letztere wegen $\mathfrak{G}_\sigma \neq 0$. — Ist nämlich $C = \sum C_i$ die direkte Summenzerlegung und entsprechend $B = \sum B_i$, $B' = \sum B_i'$, so sind die $B_i$ und die $B_i'$ mit $B$ isomorph und einfach, so daß in $C_i$ $\gamma_i^{-1} B_i \gamma_i = B_i'$ gilt. Also ist $\gamma^{-1} B \gamma = B'$ mit $\gamma = \sum \gamma_i$.

$$\gamma^{-1}\sigma\gamma = u_\sigma, \quad \gamma^{-1}K\gamma = K$$

erfüllt. Zufolge der zweiten dieser Gleichungen ist $\gamma = \varrho\mathfrak{G}$, mit $\varrho$ in $\Gamma$ und $\mathfrak{G}$ in $A \times K$. Die erstere Gleichung liefert dann

$$\mathfrak{G}_\sigma = \sigma^{-1}\varrho^{-1}\sigma\varrho(\mathfrak{G}^{\varrho^{-1}\sigma\varrho})^{-1}\mathfrak{G}.$$

Demnach muß $\varrho$ dem Zentrum von $\Gamma$ angehören, d. h. es ist

$$\mathfrak{G}_\sigma = (\mathfrak{G}^\sigma)^{-1}\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^{-\sigma}\mathfrak{G}. \tag{8}$$

Nun ist $(\mathfrak{G}^{(\mathfrak{F})})^\sigma = (\mathfrak{G}^\sigma)^{(\mathfrak{F})}$, da $\mathfrak{F}$ Elemente in $k$ hat. Aus (8) und $\mathfrak{G}_\sigma^{1+(\mathfrak{F})} = \mathfrak{E}$ folgt $\mathfrak{G}\mathfrak{G}^{(\mathfrak{F})} = (\mathfrak{G}\mathfrak{G}^{(\mathfrak{F})})^\sigma$, und zwar für jedes $\sigma$ aus $\Gamma$; demnach hat $\mathfrak{G}\mathfrak{G}^{(\mathfrak{F})}$ Elemente in $k$. Wenn jetzt gezeigt werden kann, daß es eine Matrix $\mathfrak{G}_0$ mit Elementen in $k$, die mit allen Matrizen aus $R_1$ vertauschbar ist, so gibt, daß

$$\mathfrak{G}_0\mathfrak{G}_0^{(\mathfrak{F})} = \mathfrak{G}\mathfrak{G}^{(\mathfrak{F})} = \mathfrak{N} \tag{9}$$

ist, kann der Beweis für Satz 3 leicht zu Ende geführt werden: Dann gilt nämlich erstens auch

$$\mathfrak{G}_\sigma = \mathfrak{G}_1^{-\sigma}\mathfrak{G}_1 \tag{10}$$

mit $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_0^{-1}\mathfrak{G}$. Zweitens folgt aus (9): $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_1^{(\mathfrak{F})} = \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{G}_1$ ist $\mathfrak{F}$-o. Drittens ist $\mathfrak{G}_1$ mit $R_1$ vertauschbar, also mit $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{G}_1\mathfrak{S}$ gilt zufolge (5):

$$\mathfrak{S}_1^{-1}R_1\mathfrak{S}_1 = R_2. \tag{11}$$

Viertens ist auch $\mathfrak{S}$ eine $\mathfrak{F}$-o. Matrix:

$$\mathfrak{S}_1\mathfrak{F}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{F}. \tag{12}$$

Fünftens ist wegen (6) und (10):

$$\mathfrak{S}_1^\sigma = \mathfrak{S}_1, \tag{13}$$

d. h. $\mathfrak{S}_1$ hat Elemente in $k$, und die Existenz einer solchen Matrix war zu beweisen.

Umgekehrt folgt aus der Existenz eines $\mathfrak{S}_1$ mit den Eigenschaften (11)–(13) die Lösbarkeit von (9) durch ein mit $R_1$ vertauschbares $\mathfrak{G}_0$ mit Elementen in $k$. In der Tat: $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}^{-1}$ ist mit allen Elementen aus $R_1$ vertauschbar und $\mathfrak{F}$-o., und nach (13) und (6) gilt (10). $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}\mathfrak{G}_1^{-1}$ erfüllt also (9) und ist wegen (8) und (10) invariant gegenüber allen $\sigma$. Endlich ist $\mathfrak{G}_0$ mit allen Matrizen aus $R_1$ vertauschbar, da dies für $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ gilt.

Die Existenz einer Lösung von $\mathfrak{G}_0$ von (9), die mit allen Matrizen aus $R_1$ vertauschbar ist und Elemente in $k$ hat, ist somit notwendig und hinreichend für die Gültigkeit der zu beweisenden Aussage. Um von der Voraussetzung des Satzes 3 Gebrauch machen zu können, zerlegen wir jetzt $R_1$ in eine direkte Summe von Körpern:

$$R_1 = \sum P_i + \sum (Q_i + Q_i') + \sum S_i,$$

wobei $(\mathfrak{F})$ in jedem $P_i$ einen nicht identischen Automorphismus der Ordnung 2 induziert, $Q_i$ mit $Q_i'$ vertauscht, und $S_i$ elementweise fest läßt. Transformiert man $R_1$ durch eine Matrix $\mathfrak{S}_3$ in $k$ in die reduzierte Gestalt

$$\mathfrak{S}_3^{-1} R_1 \mathfrak{S}_3 = \begin{pmatrix} P_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & Q_1 & & & \\ & & & Q_1' & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & S_1 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

so wird gleichzeitig $\mathfrak{F}$ in entsprechender Weise in variablenfremde Teilformen ausgespalten:

$$\dot{\mathfrak{S}}_3 \mathfrak{F} \mathfrak{S}_3 = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathfrak{G}_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathfrak{H}_1 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{G}_i = \begin{pmatrix} & \mathfrak{R}_i \\ \mathfrak{R}_i & \end{pmatrix}.$$

Es beschränkt die Allgemeinheit nicht, wenn man $\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{E}$ oder $R_1$ und $\mathfrak{F}$ bereits in dieser reduzierten Gestalt annimmt. Der Automorphismus $(\mathfrak{F})$ von $R_1$ induziert dann in den $P_i$, $Q_i + Q_i'$, $S_i$ die Automorphismen $(\mathfrak{F}_i)$, $(\mathfrak{G}_i)$, $(\mathfrak{H}_i)$. Es genügt daher, den Satz 3 für die Ringe $P_i$, $Q_i + Q_i'$, $S_i$ einzeln zu beweisen. Hier machen wir endlich von der Voraussetzung Gebrauch, daß $R_1$ (und $R_2$) den Rang $n$ haben soll. Dann folgt, daß die Ränge von $P_i, \ldots$ gleich den Reihenzahlen der symmetrischen Matrizen $\mathfrak{F}_i, \ldots$ sind. In jedem der drei Fälle ist dann die allgemeinste mit allen Elementen von $R_1$ vertauschbare Matrix selbst in $R_1$ enthalten, so daß also (9) durch eine Matrix $\mathfrak{G}_0$ aus $R_1$ zu lösen ist.

Ist erstens $R_1$ ein bei $(\mathfrak{F})$ elementweise invarianter Körper, so lautet (9): $\mathfrak{G}_0^2 = \mathfrak{R}$, diese Gleichung ist dann und nur dann in $R_1$ lösbar, wenn sie in jeder $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterung lösbar ist.

Zweitens sei $R_1$ die direkte Summe zweier Körper $Q$, $Q'$, welche bei dem Automorphismus $(\mathfrak{F})$ vertauscht werden. In Matrixschreibweise lautet (9) jetzt:

$$\mathfrak{G}_0 = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q} & \\ & \mathfrak{Q}' \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_1 & \\ & \mathfrak{R}_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}' = \mathfrak{R}_1.$$

Diese Gleichung ist stets lösbar.

Drittens sei $R_1$ ein Körper, in dem $(\mathfrak{F})$ einen nicht identischen Automorphismus der Ordnung 2 bedeutet, und $R_{11}$ der Unterkörper

aller bei $(\mathfrak{F})$ festen Elemente von $R_1$. $R_1/R_{11}$ ist relativ-quadratisch, und (9) lautet

$$n_{R_1/R_{11}}(\mathfrak{G}_0) = \mathfrak{R},$$

ihre Lösbarkeit im Großen, wenn sie überall im Kleinen lösbar ist, ist der Inhalt des Normensatzes. Hiermit ist der Satz 3 in vollem Umfange bewiesen.

Unsere Überlegungen zeigen auch umgekehrt, daß man den Normensatz aus Satz 3 herleiten kann, wenn man sich nur vergewissert, daß jeder relativ-quadratische Zahlkörper in dieser Weise mit quadratischen Formen in Zusammenhang gebracht werden kann. Da wir uns bisher auf solche Formen beschränkt hatten, welche die Null nicht eigentlich darstellen, ist hier allerdings eine Einschränkung notwendig. Da aber der Normensatz ohne Beschränkung gilt, läßt gerade dieser Umstand vermuten, daß die Sätze 2 und 3 einen weiteren Gültigkeitsbereich haben dürften als angegeben.

(Eingegangen am 15. Juli 1949.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 1, S. 21—52 (1950).

# Lösung eines speziellen Minimumproblems.

Von

**K. Nickel in Tübingen.**

**Inhalt.**

Seite

I. Einleitung. . . . . 21
II. Vorbemerkungen und Bereitstellung von Hilfsmitteln. . . . . 22
III. Lösung des Minimumproblems in einem abstrakten Raum $\mathfrak{R}$. . . . . 32
IV. Übertragung der Ergebnisse von III auf den Raum $L_p$. . . . . 41
V. Ergebnis. . . . . 46
VI. Beispiele. . . . . 48

## I. Einleitung.

Die Aufgabe, eine in $\langle 0, \pi \rangle$ definierte Funktion $Z(x)$ zu finden, die das Funktional

$$\int_0^\pi Z(x)\, w(x)\, dx$$

zu einem Minimum macht, wobei zur Abkürzung

$$w(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi}{}' \frac{dZ(y)}{dy} \frac{\sin x}{\cos y - \cos x}\, dy \quad [1])$$

gesetzt ist und die Nebenbedingung

$$\int_0^\pi Z(x)\, dx = A \qquad (A \text{ reell vorgegeben})$$

erfüllt sein soll, wurde schon verschiedentlich behandelt (vgl. etwa M. Munk [2]) mit etwas anderen Bezeichnungen). Dabei wurden jedoch keine Angaben über die zu treffenden Voraussetzungen gemacht.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, unter genau festgelegten Voraussetzungen die umfassendere Aufgabe zu behandeln,

$$\int_0^\pi Z(x)\, w(x)\, dx$$

zu einem Minimum zu machen unter endlich vielen Nebenbedingungen

[1]) Das Zeichen $\int'$ soll den Cauchyschen Hauptwert des Integrals bedeuten.

[2]) M. Munk, Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges. Inaugural-Dissertation, Göttingen 1919.

der beiden Arten

$$(*) \qquad \int_0^\pi Z(x)\, h(x)\, dx = A \qquad (A \text{ und } h(x) \text{ vorgegeben})$$

und

$$(**) \qquad \int_0^\pi Z(x)\, w(x)\, g(x)\, dx = B \qquad (B \text{ und } g(x) \text{ vorgegeben}).$$

Hierin ist das obige Problem als Sonderfall enthalten.

In dem vorbereitenden Abschnitt II werden notwendige Hilfsmittel bereitgestellt. Um die benutzten Überlegungen deutlicher werden zu lassen, wird dann das betrachtete Minimumproblem in Abschnitt III zunächst in abstrakter Formulierung betrachtet und es werden sowohl notwendige, als auch hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit angegeben. Einige Zusätze erläutern diese Bedingungen. In Abschnitt IV werden diese Ergebnisse auf den vorliegenden Fall angewendet. Dabei ergibt sich: Wenn die Konstanten $B$ der Nebenbedingungen (**) aus einem gewissen Bereich genommen werden, der von den Konstanten $A$ der Nebenbedingungen (*) abhängt, gibt es genau eine Lösung des Minimumproblems und diese wird durch Auflösen einer Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art gewonnen. Dieses Ergebnis ist in Abschnitt V formuliert. In VI werden spezielle Funktionen $g(x)$ betrachtet und es wird gezeigt, daß dann die Fredholmsche Integralgleichung sich auf ein endliches lineares Gleichungssystem reduzieren läßt. Ein einfaches Beispiel dieser Art wird bis zu expliziter Angabe der Lösung durchgerechnet.

## II. Vorbemerkungen und Bereitstellung von Hilfsmitteln.

Alle in dieser Arbeit vorkommenden Integrale sollen im Lebesgueschen Sinne aufgefaßt werden. Ist $p > 1$, so soll eine im Intervall $\langle a, b\rangle$ fast überall definierte Funktion $f(x)$ *mit der p-ten Potenz integrierbar* heißen, wenn $f(x)$ in $\langle a, b\rangle$ meßbar ist und wenn

$$\int_a^b |f(x)|^p\, dx$$

existiert (vgl.[3]). Die Gesamtheit dieser Funktionen wird der Raum $L_p$ genannt, man schreibt dann $f(x)$ als Element des Raumes $L_p$ kurz $f \in L_p$. In $\langle a, b\rangle$ fast überall übereinstimmende Funktionen sollen in $L_p$ nicht mehr unterschieden werden. Wird $q$ durch $1/p + 1/q = 1$ bestimmt, so nennt man $q$ *zu* $p$ *konjugiert*. Als Intervalle des Raumes $L_p$ kommen

[3]) Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II C 10, S. 1191. Leipzig 1923—1927.

hier nur $\langle 0, \pi\rangle$, $\langle 0, 2\pi\rangle$ und $\langle -\pi, \pi\rangle$ vor; da sich dies aus dem Zusammenhang von selbst ergeben wird, soll darauf nicht mehr besonders hingewiesen werden.

1. Nach M. Riesz[4]) gilt:

a) Zwei konjugierte trigonometrische Reihen sind gleichzeitig die Fourierreihen zweier Funktionen aus $L_p$ ([4]) S. 226).

b) Ist $f(x)$ in $\langle 0, 2\pi\rangle$ definiert und $f \in L_p$, so existieren die folgenden Integrale als Cauchysche Hauptwerte und es gelten die Reziprozitätsformeln

$$(1)\qquad \begin{cases} \bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\,{\int_0^{2\pi}}' f(y)\,\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}\,dy \\ f(x) = \frac{1}{2\pi}\,{\int_0^{2\pi}}' \bar{f}(y)\,\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,dy \end{cases}$$

([4]) S. 225 und 227, nur ist dort $\bar{f}$ durch $-\bar{f}$ zu ersetzen). Die Fourierreihe der durch (1) definierten Funktion $\bar{f}(x)$ ist dabei konjugiert zu derjenigen von $f(x)$; nach a) ist also auch $\bar{f} \in L_p$.

c) Ist $f \in L_p$ und $g \in L_q$ und haben $f(x)$ und $g(x)$ die Fourierkoeffizienten $a_n, b_n$ und $\alpha_n; \beta_n$ in $\langle 0, 2\pi\rangle$, so gilt ([4]) S. 231)

$$(2)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{2}\,a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

Dabei konvergiert die Reihe auf der rechten Seite.

2. Ersetzt man $x$ durch $x+\pi$, $y$ durch $y+\pi$, $f(x+\pi)$ durch $f(x)$ sowie $\bar{f}(x+\pi)$ durch $\bar{f}(x)$, so erhält man aus (1)

$$(1\,a)\qquad \begin{cases} \bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\,{\int_{-\pi}^{\pi}}' f(y)\,\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}\,dy \\ f(x) = \frac{1}{2\pi}\,{\int_{-\pi}^{\pi}}' \bar{f}(y)\,\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy. \end{cases}$$

Im Folgenden sei $f(x)$ nur noch in $\langle 0, \pi\rangle$ definiert. Man denkt sich $f(x)$ gerade, $\bar{f}(x)$ nach der oberen Formel von (1a) also ungerade fortgesetzt, und erhält damit (vgl. K. Schröder[5])) die einander eindeutig

[4]) M. Riesz, Sur les fonctions conjugées. Mathematische Zeitschrift 27 (1928), S. 218—244.

[5]) K. Schröder, Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften XXX (1938).

auflösenden Formeln

$$\begin{cases} \bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi}{}' f(y) \frac{\sin x}{\cos y - \cos x} \, dy \\ f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi}{}' \bar{f}(y) \frac{\sin y}{\cos y - \cos x} \, dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \, dy \end{cases}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$H(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin y}{\cos x - \cos y} \tag{3}$$

gesetzt wird,

$$\begin{cases} \bar{f}(x) = -\int_0^{\pi}{}' f(y) H(y, x) \, dy \\ f(x) = -\int_0^{\pi}{}' \bar{f}(y) H(x, y) \, dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \, dy. \end{cases} \qquad (f, \bar{f} \in L_p) \tag{1b}$$

Analog ergeben sich aus (1a) für eine in $\langle 0, \pi \rangle$ definierte Funktion $g(x)$, die man sich ungerade nach $\langle -\pi, 0 \rangle$ fortgesetzt denkt, die Formeln

$$\begin{cases} \bar{g}(x) = \int_0^{\pi}{}' g(y) H(x, y) \, dy \\ g(x) = \int_0^{\pi}{}' \bar{g}(y) H(y, x) \, dy. \end{cases} \qquad (g, \bar{g} \in L_p) \tag{1c}$$

Zu jeder in $\langle 0, \pi \rangle$ definierten Funktion $f(x)$ aus $L_p$ gibt es also eine Funktion $\bar{f}(x)$ aus $L_p$, die durch die obere Formel von (1b) definiert ist, so daß auch die untere Formel von (1b) gilt; sowie umgekehrt. Dasselbe gilt auch für eine in $\langle 0, \pi \rangle$ erklärte Funktion $g(x)$ aus $L_p$ und die Formel (1c). Wird weiter $f(x)$ gerade und $g(x)$ ungerade in das Intervall $\langle -\pi, 0 \rangle$ hinein fortgesetzt, so sind die Fourierreihen zu $\bar{f}(x)$ bzw. $\bar{g}(x)$, wobei die Fourierkoeffizienten auf das ganze Intervall $\langle -\pi, \pi \rangle$ bezogen sind, konjugiert zu denjenigen von $f(x)$ und $g(x)$.

3. Seien $f(x)$ und $g(x)$ in $\langle 0, \pi \rangle$ definiert mit $f \in L_p$, $g \in L_q$, beide ungerade oder beide gerade in das Intervall $\langle -\pi, 0 \rangle$ hinein fortgesetzt, und mögen im Intervall $\langle -\pi, \pi \rangle$ die Fourierkoeffizienten $a_n$, $b_n$ und

$\alpha_n, \beta_n$ besitzen. Dann erhält man aus (2):

$$(2a)\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\,a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\alpha_n & \text{bei gerader Fortsetzung} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n\beta_n & \text{bei ungerader Fortsetzung.} \end{cases}$$

Ist $f(x)$ gerade, $g(x)$ ungerade fortgesetzt, so ergibt sich aus (1c) und dem ersten Teil von (2a)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\left(\int_0^{\pi}{}' g(y)\,H(x,y)\,dy\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\dot{\bar{g}}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\beta_n,$$

und analog mit (1b) und dem zweiten Teil von (2a):

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\left(\int_0^{\pi}{}' f(y)\,H(y,x)\,dy\right)dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \bar{f}(x)\,g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\beta_n.$$

Also gilt für $f \in L_p$, $g \in L_q$

$$(4)\quad \int_0^{\pi} f(x)\left(\int_0^{\pi}{}' g(y)\,H(x,y)\,dy\right)dx = \int_0^{\pi} g(y)\left(\int_0^{\pi}{}' f(x)\,H(x,y)\,dx\right)dy,$$

d. h. die Integrationsreihenfolge darf vertauscht werden.

Wählt man speziell

$$g(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leqq y \leqq z \\ 0 & \text{für } z < y \leqq \pi, \end{cases}$$

so ergibt sich für jedes $f \in L_p$

$$\int_0^{z}\left(\int_0^{\pi}{}' f(x)\,H(x,y)\,dx\right)dy = \int_0^{\pi} f(x)\left(\int_0^{z}{}' H(x,y)\,dy\right)dx,$$

also

$$\int_0^{y}\left(\int_0^{\pi}{}' f(x)\,H(x,t)\,dx\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\log\left|\frac{\cos x - \cos y}{\cos x - 1}\right|dx.$$

Vertauscht man in (4) $g$ mit $f$ und ersetzt $x$ durch $t$, sowie $z$ durch $x$, so erhält man analog

$$(5)\quad \int_0^{x}\left(\int_0^{\pi}{}' f(y)\,H(t,y)\,dy\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(y)\log\frac{\sin\frac{x+y}{2}}{\sin\left|\frac{x-y}{2}\right|}\,dy.$$

Damit gilt für $f \in L_p$ fast überall in $\langle 0, \pi \rangle$:

$$(5a)\quad \begin{cases} \overset{\pi}{\underset{0}{\int}}{}' f(x)\, H(x,y)\, dx = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_0^\pi f(x) \log|\cos x - \cos y|\, dx \\ \overset{\pi}{\underset{0}{\int}}{}' f(y)\, H(x,y)\, dy = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^\pi f(y) \log \dfrac{\sin\frac{x+y}{2}}{\sin\left|\frac{x-y}{2}\right|}\, dy. \end{cases}$$

(Die untere Formel bei (5a) wird bei K. Schröder [5]) unter engeren Voraussetzungen, nämlich im wesentlichen für $f \in L_4$ bewiesen.)

4. Es sei $f(x)$ in $\langle 0, \pi \rangle$ definiert und $f \in L_p$. Bildet man nun $\bar{f}(x)$ nach der oberen Zeile von (1c) und setzt man

$$F(x) = \int_0^x \bar{f}(y)\, dy,$$

so ist $F(x)$ absolutstetig und in $\langle 0, \pi \rangle$ fast überall differenzierbar mit $F' = \bar{f} \in L_p$. Damit ergibt sich aus (1c) mit (5)

$$(6)\quad \begin{cases} f(x) = \overset{\pi}{\underset{0}{\int}}{}' F'(y)\, H(y,x)\, dy \\ F'(x) = \bar{f}(x) = \overset{\pi}{\underset{0}{\int}}{}' f(y)\, H(x,y)\, dy \\ F(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(y) \log \dfrac{\sin\frac{x+y}{2}}{\sin\left|\frac{x-y}{2}\right|}\, dy. \end{cases}$$

Aus der untersten Zeile von (6) entnimmt man noch $F(0) = F(\pi) = 0$.

Definition. Der Raum $\mathfrak{L}_p$ bestehe aus den Funktionen $F(x)$ mit den Eigenschaften:

$F(x)$ sei in $\langle 0, \pi \rangle$ definiert, absolutstetig und es sei $F' \in L_p$. Ferner gelte noch $F(0) = 0$, $F(\pi) = 0$.

Durch (6) sind $L_p$ und $\mathfrak{L}_p$ eineindeutig aufeinander abgebildet. Es gelten also mit den Bezeichnungen

$$(7)\qquad S(x,y) = \frac{1}{\pi} \log \frac{\sin\frac{x+y}{2}}{\sin\left|\frac{x-y}{2}\right|} \quad \text{und} \quad Z(x,f) = F(x)$$

die einander eindeutig auflösenden Formeln

$$(8)\qquad \begin{cases} f(x) = \int_0^{\pi}{}' Z'(y, f)\, H(y, x)\, dy & (f \in L_p) \\ Z'(x, f) = \int_0^{\pi}{}' f(y)\, H(x, y)\, dy & (Z' \in L_p) \\ Z(x, f) = \int_0^{\pi} f(y)\, S(x, y)\, dy. & (Z \in \mathfrak{L}_p) \end{cases}$$

Aus diesem Grunde können die folgenden Überlegungen beliebig in $L_p$ oder in $\mathfrak{L}_p$ durchgeführt werden.

5. Für alle $p > 1$ ist sicher $\mathfrak{L}_p \subset L_q$ $(1/p + 1/q = 1)$. Seien $f \in L_p$, $g \in L_p$ in $\langle 0, \pi\rangle$ definiert, ungerade nach $\langle -\pi, 0\rangle$ fortgesetzt und mögen in $\langle -\pi, \pi\rangle$ die Fouriersinuskoeffizienten $a_n$ und $b_n$ besitzen. Nach (6) hat dann $Z(x, f)$ wegen $Z'(x, f) = \bar{f}(x)$ die Fouriersinuskoeffizienten $\frac{a_n}{n}$. Damit ergibt sich aus (2 a):

$$(9)\qquad \int_0^{\pi} f(x)\, Z(x, g)\, dx = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, g(y)\, S(x, y)\, dx\, dy = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n b_n$$

und die Reihe rechts konvergiert. Setzt man also

$$(10)\qquad (f, g) = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, g(y)\, S(x, y)\, dx\, dy \qquad (f, g \in L_p),$$

so existiert dieses „innere Produkt" zweier Elemente aus $L_p$ immer und hat folgende Eigenschaften (a reell; $f$, $g$ und $h$ Elemente aus $L_p$):

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\text{a)} && (af, g) = a(f, g) \\ &\text{b)} && (f, g) = (g, f) \\ &\text{c)} && (f + g, h) = (f, h) + (g, h) \\ &\text{d)} && (f, f) > 0 \text{ für } f \neq 0. \end{aligned}$$

(a) und c) ergeben sich direkt aus der Definition (10), b) und d) folgen aus (9). Bei d) bedeutet $f \neq 0$: es soll $f(x) \neq 0$ auf einer Menge positiven Maßes in $\langle 0, \pi\rangle$ sein.)

6. Voraussetzung. Es sei $g(x)$ in $\langle 0, \pi\rangle$ definiert, differenzierbar und die Ableitung $g'(x)$ genüge dort gleichmäßig einer Lipschitz-Bedingung

$$|g'(x + \varepsilon) - g'(x)| < C\,|\varepsilon|^{\lambda} \quad \text{für} \quad |\varepsilon| < \delta$$

mit Konstanten $C$, $\delta$, $\lambda > 0$. Ferner sei noch $\frac{g'(x)}{\sin x}$ bei $x = 0$ und $x = \pi$ beschränkt.

**Behauptung.** $\frac{g(x)-g(y)}{\cos x-\cos y}\sin y$ ist für $0 \leqq x, y \leqq \pi$ stetig und es gilt:

$$(12)\qquad \int_0^{\pi}{}' \frac{g(x)-g(t)}{\cos x-\cos t}\sin t\, H(y,t)\,dt = -g(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(y)\,dy + \frac{\bar{g}(x)\sin x-\bar{g}(y)\sin y}{\cos x-\cos y},$$

dabei ist auch die durch (12) dargestellte Funktion für alle $x, y$ aus $0 \leqq x, y \leqq \pi$ stetig.

**Beweis.** a) Nach J. Priwaloff[6]) genügt unter den obigen Voraussetzungen die zur Fourierreihe von $g'(x)$ konjugierte Reihe ebenfalls gleichmäßig einer Lipschitz-Bedingung, stellt also $\bar{g}'(x)$ dar (wie man sich leicht überlegt, ist unter den obigen Voraussetzungen sicher $\frac{d}{dx}\bar{g}(x) = \overline{g'(x)}$). Es ist also

$$|\bar{g}'(x+\varepsilon)-\bar{g}'(x)| < \bar{C}|\varepsilon|^{\bar{\lambda}} \quad \text{für} \quad |\varepsilon| < \bar{\delta}$$

mit Konstanten $\bar{C}, \bar{\delta}, \bar{\lambda} > 0$.

b) Es gilt

$$(13a)\qquad 2\sum_{m=0}^{n-1}\cos mx\sin(n-m)y = \sin ny + \frac{\cos nx-\cos ny}{\cos x-\cos y}\sin y$$

und

$$(13b)\qquad 2\sum_{m=0}^{n-1}\cos mx\cos(n-m)y = \cos ny-\cos nx - \frac{\sin nx\sin x-\sin ny\sin y}{\cos x-\cos y}$$

für alle $n = 1, 2, \ldots$ und alle $x$ und $y$. (Man bestätigt diese Formeln leicht, wenn man sie mit $\cos x-\cos y$ multipliziert und die Umrechnungsformeln der trigonometrischen Funktionen beachtet.)

c) Durch spezielle Wahl von $f(x)$ ergeben sich aus (1c) die Formeln

$$(14a)\qquad \int_0^{\pi}{}' \sin ny\, H(x,y)\,dy = \cos nx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und

$$(14b)\qquad \int_0^{\pi}{}' \cos nx\, H(x,y)\,dx = \sin ny \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

[6]) J. Priwaloff, Sur les fonctions conjugées. Bulletin de la Société Mathématique de France 44 (1916), S. 100—103.

Wendet man (14a) auf (13a) an, so findet man

$$\int_0^{\pi}{}' \frac{\cos n x - \cos n t}{\cos x - \cos t} \sin t\, H(y,t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi}{}' \left[ 2 \sum_{m=0}^{n-1} \cos m x \sin (n-m) t - \sin n t \right] H(y,t)\, dt$$

$$= 2 \sum_{m=0}^{n-1} \cos m x \cos (n-m) y - \cos n y \qquad \text{und nach (13b)}$$

$$= -\cos n x - \frac{\sin n x \sin x - \sin n y \sin y}{\cos x - \cos y}$$

für $n = 1, 2, \ldots$.

d) Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der zu $g(x)$ gehörenden Fourier-Reihe (vgl. W. Rogosinski[7] S. 59) stellt diese $g(x)$ dar. Denkt man sich $g(x)$ gerade nach $\langle -\pi, 0\rangle$ fortgesetzt, so ist $g(x)$ wegen $g'(-\pi) = g'(0) = g'(\pi) = 0$ auch in $\langle -\pi, \pi\rangle$ noch stetig differenzierbar und genügt auch dort der vorausgesetzten Lipschitz-Bedingung. Sei etwa in $\langle -\pi, \pi\rangle$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n x,$$

so gilt nach c):

$$\int_0^{\pi}{}' \frac{g(x) - g(t)}{\cos x - \cos t} \sin t\, H(y,t)\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\pi}{}' \frac{\cos n x - \cos n t}{\cos x - \cos t} \sin t\, H(y,t)\, dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ -\cos n x - \frac{\sin n x \sin x - \sin n y \sin y}{\cos x - \cos y} \right]$$

$$= -g(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(t)\, dt + \frac{\bar{g}(x) \sin x - \bar{g}(y) \sin y}{\cos x - \cos y}$$

und dies ist die behauptete Gleichung (12).

e) Nach a) ist $\bar{g}'(x)$ in $\langle 0, \pi\rangle$ stetig, also ist $\bar{g}(x) \sin x$ dort stetig differenzierbar, mithin ist nach dem Mittelwertsatz auch mit

$$\frac{\bar{g}(x) \sin x - \bar{g}(y) \sin y}{\cos x - \cos y}$$

die rechte Seite von (12) in $0 < x, y < \pi$ stetig. Weiter gilt nach a) und der oben angeschriebenen Entwicklung von $g(x)$:

$$\bar{g}(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n x,$$

[7]) W. Rogosinski, Fouriersche Reihen. Berlin 1930.

also $\bar{g}(0) = \bar{g}(\pi) = 0$. Da aber $\bar{g}'(x)$ bei 0 und $\pi$ stetig ist, besitzt dort $\bar{g}(x)$ Nullstellen mindestens erster Ordnung. Folglich ist $\frac{\bar{g}(x)\sin x - \bar{g}(y)\sin y}{\cos x - \cos y}$ und damit die rechte Seite von (12) auch noch für $0 \leqq x, y \leqq \pi$ stetig.

f) Die Stetigkeit von $\frac{g(x) - g(y)}{\cos x - \cos y} \sin y$ in $0 \leqq x, y \leqq \pi$ ergibt sich ähnlich.

7. Rechenregeln für $Z(x, f)$.

Nach Definition (8) ist

$$Z(x, af + bg) = a\,Z(x, f) + b\,Z(x, g) \qquad (a, b \text{ reell}, \ f, g \in L_p).$$

Genügt $g(x)$ den unter 6. angegebenen Voraussetzungen, so ist sicher $fg \in L_p$, wenn nur $f \in L_p$ ist; also existiert auch $Z(x, fg)$. Es soll nun $Z(x, fg)$ als Funktion von $Z(x, f)$ und $g(x)$ bestimmt werden. Nach (8) gilt

$$Z(x, fg) = \int_0^\pi f(y)\, g(y)\, S(x, y)\, dy.$$

Daraus wird mit

$$Z(x, f) = F(x)$$

$$Z(x, fg) = \int_0^\pi \Big( \int_0^{\pi}{}' F'(t)\, H(t, y)\, dt \Big) g(y)\, S(x, y)\, dy$$

$$= \int_0^\pi \Big( \int_0^{\pi}{}' F'(t)\, g(t)\, H(t, y)\, dt \Big) S(x, y)\, dy +$$

$$+ \int_0^\pi \Big( \int_0^{x}{}' F'(t)\, [g(y) - g(t)]\, H(t, y)\, dt \Big) S(x, y)\, dy.$$

Mit $F' \in L_p$ ist

$$\Phi(x) = \int_0^x [F'(y)\, g(y) - l]\, dy$$

aus dem Raume $\mathfrak{L}_p$, wobei

$$l = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F'(y)\, g(y)\, dy$$

gesetzt ist. Insbesondere gilt dafür $\Phi(0) = \Phi(\pi) = 0$. Damit ergibt sich nach (8)

$$\int_0^x F'(y)\, g(y)\, dy - l\,x = \Phi(x) = \int_0^\pi \Big( \int_0^{\pi}{}' \Phi'(t)\, H(t, y)\, dt \Big) S(x, y)\, dy$$

$$= \int_0^\pi \Big( \int_0^{\pi}{}' F'(t)\, g(t)\, H(t, y)\, dt \Big) S(x, y)\, dy,$$

denn nach (14 b) für $n = 0$ ist

$$\int_0^{\pi}{}' H(t, y)\, dt = 0.$$

Also wird

$$Z(x, fg) = \int_0^x F'(y)\, g(y)\, dy - l x -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \int_0^{\pi} F'(t) \frac{g(t) - g(y)}{\cos t - \cos y} \sin y\, dt \right) S(x, y)\, dy.$$

Dabei braucht das innere Integral des letzten Summanden nicht mehr als Cauchyscher Hauptwert aufgefaßt zu werden, denn $\frac{g(t) - g(y)}{\cos t - \cos y} \sin y$ ist nach 6. f) in $0 \leqq t, y \leqq \pi$ stetig.

Da $F'(t)$ in $0 \leqq t \leqq \pi$, und $S(x, y)$ bei festem $x$ in $0 \leqq y \leqq \pi$ integrierbar ist, ist auch $F'(t)\, S(x, y)$ in $0 \leqq t, y \leqq \pi$ integrierbar. Die Funktion $\frac{g(t) - g(y)}{\cos t - \cos y} \sin y$ ist nach 6. f) in $0 \leqq t, y \leqq \pi$ stetig, also sicher meßbar und beschränkt. Dann ist auch

$$F'(t) \frac{g(t) - g(y)}{\cos t - \cos y} \sin y\, S(x, y)$$

bei festem $x$ über $0 \leqq t, y \leqq \pi$ integrierbar[8]). Nach dem Satz von Fubini[8a]) kann also die Integrationsreihenfolge vertauscht werden und man erhält

$$Z(x, fg) = \int_0^x Z'(y, f)\, g(y)\, dy - l x -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Z'(y, f) \left( \int_0^{\pi} \frac{g(y) - g(t)}{\cos y - \cos t} \sin t\, S(x, t)\, dt \right) dy.$$

Beachtet man (5) und (12), so ergibt sich mit

$$\int_0^{\pi} \frac{g(y) - g(t)}{\cos y - \cos t} \sin t\, S(x, t)\, dt =$$

$$= \int_0^x \left( \int_0^{\pi}{}' \frac{g(y) - g(t)}{\cos y - \cos t} \sin t\, H(s, t)\, dt \right) ds =$$

[8]) Vgl. etwa C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, S. 438 2. Auflage, Leipzig und Berlin bei B. G. Teubner 1927.

[8a]) Siehe etwa C. Carathéodory a. a. O., S. 632 Satz 4.

$$= \int_0^x \left[ -g(y) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(t)\, dt + \frac{\bar{g}(s) \sin s - \bar{g}(y) \sin y}{\cos s - \cos y} \right] ds$$

$$= -x\, g(x) + \frac{x}{\pi} \int_0^\pi g(t)\, dt + \int_0^x \frac{\bar{g}(s) \sin s - \bar{g}(y) \sin y}{\cos s - \cos y}\, ds$$

$$Z(x, fg) = \int_0^x Z'(y, f)\, g(y)\, dy - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Z'(y, f) \left( \int_0^x \frac{\bar{g}(s) \sin s - \bar{g}(y) \sin y}{\cos s - \cos y}\, ds \right) dy.$$

Partielle Integration des ersten und Vertauschung der Integrationsreihenfolge beim zweiten Summanden liefert daraus

$$(15) \qquad Z(x, fg) = Z(x, f)\, g(x) - \int_0^x Z(y, f)\, g'(y)\, dy - \frac{1}{\pi} \int_0^x \int_0^\pi Z'(y, f) \frac{\bar{g}(s) \sin s - \bar{g}(y) \sin y}{\cos s - \cos y}\, dy\, ds.$$

## III. Lösung des Minimumproblems in einem abstrakten Raum $\mathfrak{R}$.

8. Definition des Raumes $\mathfrak{R}$.

Der Raum $\mathfrak{R}$, der aus den Elementen $f, g, h, \ldots$ bestehen möge, besitze folgende Eigenschaften:

a) $\mathfrak{R}$ sei ein Vektorraum. D. h.: In $\mathfrak{R}$ ist eine Addition $f + g$ und eine Multiplikation $af$ mit reellen Zahlen $a$ definiert, und es gelten dafür die üblichen Rechenregeln der Vektoralgebra. Daraus folgt insbesondere die Existenz eines Elements $o$ mit $f + o = f$.

b) Jedem Paar $f, g$ von Elementen aus $\mathfrak{R}$ sei eine reelle Zahl $(f, g)$, ihr „inneres Produkt" zugeordnet, und zwar so, daß

$$(11) \qquad \begin{gathered} (af, g) = a(f, g), \qquad (f + g, h) = (f, h) + (g, h) \\ (f, g) = (g, f) \quad \text{und} \quad (f, f) > 0 \text{ für } f \neq o \end{gathered}$$

ist. (Die Vollständigkeit, die $\mathfrak{R}$ zu einem Hilbertschen Raum machen würde, wird also nicht verlangt.)

c) Es sei $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}$. Zu jedem $f \in \mathfrak{R}$ und $g \in \mathfrak{R}_0$ gebe es zwei Verknüpfungen $f * g$ und $f \overset{*}{*} g$, die den Elementen $f$ und $g$ je ein neues Element aus $\mathfrak{R}$ zuordnen. Dabei gelte für endliche Summen

$$\left(\sum_n a_n f_n\right) * \left(\sum_m b_m g_m\right) = \sum_{n,m} a_n b_m (f_n * g_m)$$

und analog

$$\left(\sum_n a_n f_n\right) \overset{*}{*} \left(\sum_m b_m g_m\right) = \sum_{n,m} a_n b_m (f_n \overset{*}{*} g_m),$$

d. h. diese Verknüpfungen seien homogen und additiv. Weiter sei noch

$$(f, g * h) = (f \overset{*}{*} h, g),$$

wofür zur Abkürzung

$$(f, g, h) = (f, g * h) = (f \overset{*}{*} h, g)$$

geschrieben werde. Außerdem gehöre zu $\mathfrak{R}_0$ noch ein Element $e$, für das

$$f * e = f \overset{*}{*} e = f$$

ist.

Das dreifache Produkt $(f, g, h)$ besitze also die Eigenschaften

$$(a f_1 + b f_2, g, h) = a(f_1, g, h) + b(f_2, g, h)$$

(für $a g_1 + b g_2$ statt $g$, $a h_1 + b h_2$ statt $h$ entsprechend) und

$$(f, g, e) = (f, g).$$

9. Satz.

$A_n$ und $B_m$ $(n = 1, \ldots, N;\ m = 1, \ldots, M)$ seien beliebige reelle Zahlen. Weiter seien die $M$ Elemente $g_m$ $(m = 1, \ldots, M)$ beliebig aus $\mathfrak{R}_0$, die $N$ Elemente $h_n$ $(n = 1, \ldots, N)$ beliebig aus $\mathfrak{R}$ gewählt.

Die Aufgabe, ein Element $f \in \mathfrak{R}$ zu finden, das das Funktional

$$(C) \qquad (f, f)$$

unter den Nebenbedingungen

$$(A) \qquad (f, h_n) = A_n \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

und

$$(B) \qquad (f, f, g_m) = B_m \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

zum Minimum macht, wird dann durch das Element $f' \in \mathfrak{R}$ gelöst, wenn es eine Darstellung

$$(D) \qquad f' = \sum_{n=1}^{N} a_n h_n + \sum_{m=1}^{M} b_m (f' * g_m + f' \overset{*}{*} g_m)$$

mit reellen Konstanten $a_n$ und $b_m$ gibt, wenn $f'$ die Bedingungen (A) und (B) erfüllt und wenn

$$(E) \qquad (k, k, e - 2 \sum_{m=1}^{M} b_m g_m) \geqq 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathfrak{K}$$

gilt, wo $\mathfrak{K}$ die Menge der Elemente $k \in \mathfrak{R}$ ist, für die

$$(16) \qquad (k, h_n) = 0 \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

und

$$(17) \qquad (f', k, g_m) + (k, f', g_m) + (k, k, g_m) = 0 \quad (m = 1, \ldots, M)$$

gilt.

Gilt sogar

$$(E') \qquad (k, k, e - 2 \sum_{m=1}^{M} b_m g_m) > 0 \quad \text{für alle } k \neq o,\ k \in \mathfrak{K},$$

d. h. steht in (E) das Gleichheitszeichen nur für $k = o$, so ist $f' \in \mathfrak{R}$ die einzige Lösung des Minimumproblems.

Ist umgekehrt $f' \in \mathfrak{R}$ eine Lösung des obengenannten Minimumproblems und sind die Elemente aus $\mathfrak{R}$

$$f' * g_m + f' \overset{*}{*} g_m;\ h_n \quad (m = 1, \ldots, M;\ n = 1, \ldots, N)$$

linear unabhängig, so besitzt $f'$ eine Darstellung (D) und die Bedingung (E) (bzw. (E'), falls $f'$ einzige Lösung ist) ist erfüllt.

**Beweis.**

**10.** Die Elemente $f'$ und $f$ aus $\mathfrak{R}$ mögen die Bedingungen (A) und (B) erfüllen. Setzt man $k = f' - f$, also

$$f = f' + k,$$

so gilt demnach wegen 8. b) für $n = 1, \ldots, N$:

$$(f, h_n) - (f', h_n) = (f' + k, h_n) - (f', h_n) = (k, h_n) = 0.$$

Ebenso ergibt sich mit den 8. c) genannten Rechenregeln

$$\begin{aligned}(f, f, g_m) - (f', f', g_m) &= (f' + k, f' + k, g_m) - (f', f', g_m)\\ &= (f', k, g_m) + (k, f', g_m) + (k, k, g_m) = 0,\end{aligned}$$

für $m = 1, \ldots, M$. Da sich diese Rechnungen auch rückwärts durchführen lassen, gilt also:

Zwei Elemente $f$ und $f'$ aus $\mathfrak{R}$ erfüllen dann und nur dann die Bedingungen (A) und (B), wenn

$$k = f' - f \in \mathfrak{R}$$

(vgl. 9.) ist.

Weiter gilt für $f'$ und $f = f' + k$ nach den Rechenregeln von 8. c) mit beliebigen reellen Konstanten $a_n$ und $b_m$:

$$\begin{aligned}(f, f) - (f', f') &= (f' + k, f' + k) - (f', f') =\\
&= (f' + k, f' + k) - 2\sum_{n=1}^{N} a_n (f' + k, h_n) - 2\sum_{m=1}^{M} b_m (f' + k, f' + k, g_m)\\
&\quad - (f', f') + 2\sum_{n=1}^{N} a_n (f', h_n) + 2\sum_{m=1}^{M} b_m (f', f', g_m)\\
&= 2(k, f') - 2\sum_{n=1}^{N} a_n (k, h_n) - 2\sum_{m=1}^{M} b_m [(f', k, g_m) + (k, f', g_m)]\\
&\quad + (k, k) - 2\sum_{m=1}^{M} b_m (k, k, g_m)\\
&= 2(k, f') - 2(k, \sum_{n=1}^{N} a_n h_n) - 2(k, f', \sum_{m=1}^{M} b_m g_m) - 2(f', k, \sum_{m=1}^{M} b_m g_m)\\
&\quad + (k, k) - 2(k, k, \sum_{m=1}^{M} b_m g_m)\\
&= 2(k, f' - \sum_{n=1}^{N} a_n h_n - \sum_{m=1}^{M} b_m [f' * g_m + f' \overset{*}{*} g_m]) + (k, k, e - 2\sum_{m=1}^{M} b_m g_m)\end{aligned}$$

oder

$$(18) \qquad (f'+k, f'+k)-(f', f')=$$

$$=2\,(k, f'-\sum_{n=1}^{N} a_n h_n-\sum_{m=1}^{M} b_m\,[f'*g_m+f'\overset{*}{*}g_m])+(k, k, e-2\sum_{m=1}^{M} b_m g_m).$$

Erfüllt also $f'\in\mathfrak{R}$ die Bedingungen (A) und (B), genügt weiter $f'$ einer Darstellung (D) und ist (E) erfüllt, so folgt aus (18):

$$(f'+k, f'+k)-(f', f')\geqq 0 \quad \text{für alle } k\in\mathfrak{K}.$$

Da aber nach oben (S. 34) jedes Element $f\in\mathfrak{R}$, das die Bedingungen (A) und (B) erfüllt, eine Darstellung $f=f'+k$ mit $k\in\mathfrak{K}$ besitzt, macht $f'$ das Funktional (C) unter den Nebenbedingungen (A) und (B) zu einem Minimum. Dabei ist $f'$ offenbar die einzige Lösung dieses Minimumproblems, wenn sogar (E') erfüllt ist.

Ist andererseits $f'\in\mathfrak{R}$ Lösung des betrachteten Minimumproblems, so erhält man in $f=f'+k$ für $k\in\mathfrak{K}$ alle Elemente $f\in\mathfrak{R}$, die die Nebenbedingungen (A) und (B) erfüllen. Für diese gilt also

$$(f, f)-(f', f')\geqq 0.$$

Ist nun etwa schon bekannt, daß $f'$ eine Darstellung (D) besitzt, so folgt aus (18):

$$(E) \qquad (k, k, e-2\sum_{m=1}^{M} b_m g_m)\geqq 0 \quad \text{für alle } k\in\mathfrak{K}.$$

Ist dabei $f'$ die einzige Lösung des Minimumproblems, so steht in (E) das Gleichheitszeichen nur für $k=o$.

Es braucht also nur noch gezeigt zu werden, daß jede Lösung $f'\in\mathfrak{R}$ des betrachteten Minimumproblems eine Darstellung (D) gestattet, falls nicht die Elemente

$$f'*g_m+f'\overset{*}{*}g_m,\ h_n \quad (m=1,\ldots,M;\ n=1,\ldots,N)$$

linear abhängig sind.

11. a) Hilfssatz.

Die Elemente $l_r\in\mathfrak{R}$ $(r=1,\ldots,R)$ seien linear unabhängig. Dann gibt es für jedes Element $f\in\mathfrak{R}$ eine Darstellung

$$(19) \qquad f=k+\sum_{r=1}^{R} c_r l_r$$

mit reellen Koeffizienten $c_r$ $(r=1,\ldots,R)$ und $k\in\mathfrak{K}$ so, daß

$$(20) \qquad (k, l_r)=0$$

ist.

Beweis. Da es in der behaupteten Darstellung (19) nur auf eine Linearkombination der Elemente $l_r$ ankommt, kann man diese ohne

Beschränkung der Allgemeinheit als orthonormal annehmen, d. h. man darf voraussetzen, daß

$$(l_r, l_s) = e_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{für } r = s \\ 0 & \text{für } r \neq s \end{cases}$$

ist. Man setzt

$$c_r = (f, l_r)$$

und

$$k = f - \sum_{r=1}^{R} c_r l_r \quad \text{für jedes } f \in \mathfrak{R}.$$

Damit ist

$$(k, l_s) = (f, l_s) - \sum_{r=1}^{R} c_r (l_r, l_s) = (f, l_s) - c_s = 0.$$

Also gibt es für jedes $f \in \mathfrak{R}$ eine Darstellung (19) so, daß (20) erfüllt ist.

b) Das Element $f' \in \mathfrak{R}$ möge (C) unter den Nebenbedingungen (A) und (B) zu einem Minimum machen, weiter seien die Elemente

$$f' * g_m + f' \overset{*}{*} g_m;\ h_n \quad (m = 1, \ldots, M,\ n = 1, \ldots, N)$$

linear unabhängig. Nach a) gibt es dann eine Darstellung

$$f' = k' + \sum_{n=1}^{N} a_n h_n + \sum_{m=1}^{M} b_m [f' * g_m + f' \overset{*}{*} g_m]. \tag{21}$$

Dabei sind die $a_n$ und $b_m$ reelle Konstanten, weiter ist $k' \in \mathfrak{R}_0$, wo $\mathfrak{R}_0$ als Gesamtheit der Elemente $k$ mit den Eigenschaften

$$(k, h_n) = 0 \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{22}$$

und

$$(k, f' * g_m + f' \overset{*}{*} g_m) = 0 \qquad (m = 1, \ldots, M) \tag{23}$$

erklärt ist. Es soll nun $k' = 0$ gezeigt werden.

c) Behauptung. Zu jedem Element $k \in \mathfrak{R}_0$ gibt es eine in einem Intervall $a < u < b$ $(a < 0 < b)$ stetig differenzierbare „Funktion“

$$k(u) \in \mathfrak{R}^{9})$$

derart, daß $k(0) = o$, $\left.\frac{dk(u)}{du}\right|_{u=0} = k$ ist, und daß

$$f(u) = f' + k(u) \tag{24}$$

im Intervall $(a, b)$ die Nebenbedingungen (A) und (B) erfüllt.

Beweis. Es sei $k \in \mathfrak{R}_0$ gegeben. Weiter mögen die Elemente $l_1, \ldots, l_M$ die Eigenschaften

$$(l_r, h_n) = 0 \qquad \begin{matrix} (r = 1, \ldots, M) \\ (n = 1, \ldots, N) \end{matrix} \tag{25}$$

---

9) d. h.: Für jeden festen Wert $u$ aus $(a, b)$ ist $k(u) \in \mathfrak{R}$.

und

$$(l_r, f' * g_m + f' \overset{*}{*} g_m) = e_{rm} \qquad (r, m = 1, \ldots, M) \tag{26}$$

besitzen. (Solche Elemente $l_r \in \mathfrak{R}$ lassen sich etwa durch Orthonormalisieren aus den $f' * g_m + f' \overset{*}{*} g_m$; $h_n$ gewinnen.)

Man bildet nun

$$k(u\,;\,\mathfrak{t}) = k(u; t_1, \ldots, t_M) = u\,k + \sum_{m=1}^{M} t_m\, l_m \tag{27}$$

mit den $M+1$ reellen Unbestimmten $u$ und $t_1, \ldots, t_M$. Nach 10. genügt

$$f(u\,;\,\mathfrak{t}) = f' + k(u\,;\,\mathfrak{t})$$

den Nebenbedingungen (A) und (B) genau dann, wenn $k(u\,;\,\mathfrak{t}) \in \mathfrak{R}$ ist, d. h. wenn

$$(k(u\,;\,\mathfrak{t}), h_n) = 0 \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{28}$$

und

$$Q_m(u\,;\,\mathfrak{t}) \equiv (k(u\,;\,\mathfrak{t}), f' * g_m + f' \overset{*}{*} g_m) + (k(u\,;\,\mathfrak{t}), k(u\,;\,\mathfrak{t}), g_m) = 0 \tag{29}$$

ist für $m = 1, \ldots, M$. (28) ist nach (22) und (25) von selbst erfüllt.

In (29) hat man $M$ quadratische Polynome in den $u, t_1, \ldots, t_M$ mit der Eigenschaft

$$Q_m(0, \mathfrak{o}) = 0. \tag{30}$$

Weiter sind die partiellen Ableitungen der $Q_m$ nach $u$ und den $t_n$ stetig und es ist nach (26):

$$\frac{\partial\, Q_m(u\,;\,\mathfrak{t})}{\partial\, t_n}\Bigg|_{\substack{u=0\\ \mathfrak{t}=\mathfrak{o}}} = (l_n, f' * g_m + f' \overset{*}{*} g_m) = e_{nm}. \tag{31}$$

Also gilt für die Funktionaldeterminante an der Stelle $u = 0$, $\mathfrak{t} = \mathfrak{o}$:

$$D = \frac{\partial\,\{Q_m(u\,;\,\mathfrak{t})\}}{\partial\,\{\mathfrak{t}\}}\Bigg|_{\substack{u=0\\ \mathfrak{t}=\mathfrak{o}}} = 1. \tag{32}$$

Damit[10]) gibt es in einem den Nullpunkt enthaltenden $u$-Intervall $(a, b)$ eine stetig differenzierbare Auflösung $\mathfrak{t}(u)$ für die Gleichungen (29), d. h. es gibt stetig differenzierbare Funktionen $t_1(u), \ldots, t_M(u)$ derart, daß mit

$$k(u\,;\,\mathfrak{t}(u)) = k(u)$$

$$f(u) = f' + k(u) = f' + u\,k + \sum_{m=1}^{M} t_m(u)\, l_m \tag{24}$$

für $a < u < b$ stetig differenzierbar ist und dort die Nebenbedingungen (*B*) (und nach oben auch (*A*)) erfüllt. Ferner ist $k(0) = o$.

[10]) Vgl. etwa v. Mangoldt-Knopp, Einführung in die höhere Mathematik Band II, Seite 382/383. 8. Auflage Stuttgart 1947.

Man erhält die Ableitungen $\frac{dt_m(u)}{du}$ aus den $M$ Gleichungen

$$\frac{\partial Q_m}{\partial u} + \sum_{n=1}^{M} \frac{\partial Q_m}{\partial t_n} \frac{dt_n}{du} = 0 \qquad (m = 1, \ldots, M). \tag{33}$$

Für $u = 0$ erhält man aus (29) und (27) wegen $k \in \mathfrak{K}_0$

$$\frac{\partial Q_m}{\partial u}\Big|_{u=0} = (k, f'^* g_m + f'^*_* g_m) = 0.$$

Mit (31) wird daher aus (33):

$$\sum_{n=1}^{M} (l_n \frac{dt_n}{du}\Big|_{u=0}, f'^* g_m + f'^*_* g_m) = 0 \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

oder wegen (26):

$$\frac{dt_m(u)}{du}\Big|_{u=0} = 0 \qquad (m = 1, \ldots, M).$$

Trägt man dies in (27) ein, so findet man wie behauptet

$$\frac{dk(u)}{du}\Big|_{u=0} = \frac{dk(u; \mathfrak{t}(u))}{du}\Big|_{u=0} = k.$$

d) $f'$ sollte Lösung des Minimumproblems sein. Da $f(u)$ aus Gleichung (24) die Nebenbedingungen $(A)$ und $(B)$ erfüllt, gilt also

$$0 \leqq (f(u), f(u)) - (f', f') = (f' + k(u), f' + k(u)) - (f', f') = 2(f', k(u)) + (k(u), k(u)),$$

also

$$2(f', k(u)) + (k(u), k(u)) \geqq 0. \tag{34}$$

In (34) steht für $u = 0$ das Gleichheitszeichen. Also ist

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{du}\{2(f', k(u)) + (k(u), k(u))\}\Big|_{u=0} \\ &= 2\left(f', \frac{dk(u)}{du}\Big|_{u=0}\right) + 2\left(\frac{dk(u)}{du}\Big|_{u=0}, k(0)\right) \\ &= 2\left(f', \frac{dk(u)}{du}\Big|_{u=0}\right) \quad \text{wegen } k(0) = o, \end{aligned}$$

oder

$$\left(f', \frac{dk(u)}{du}\Big|_{u=0}\right) = 0. \tag{35}$$

Da es nun nach c) zu jedem $k \in \mathfrak{K}_0$ ein $k(u)$ mit $\frac{dk(u)}{du}\Big|_{u=0} = k$ gibt, für das sich dann die obigen Überlegungen durchführen lassen, so gilt also

$$(f', k) = 0 \qquad \text{für jedes } k \in \mathfrak{K}_0. \tag{36}$$

e) Insbesondere gilt nach (36) für das in (21) vorkommende Element $k' \in \mathfrak{K}_0$ ebenfalls

$$(f', k') = 0.$$

Aus (21) folgt also wegen (22) und (23)

$$0 = (f', k') = (k', k') + \sum_{n=1}^{N} a_n (h_n, k') + \sum_{m=1}^{M} b_m (k', f' * g_m + f'^{*}_{*} g_m) = (k', k')$$

oder

$$\underline{k' = o.}$$

Also lautet die Darstellung (21) tatsächlich

$$f' = \sum_{n=1}^{N} a_n h_n + \sum_{m=1}^{M} b_m [f' * g_m + f'^{*}_{*} g_m]. \tag{37}$$

Ist also $f' \in \mathfrak{R}$ Lösung des Minimumproblems und sind die Elemente $f' * g_m + f'^{*}_{*} g_m$, $h_n$ linear unabhängig, so besitzt $f'$ die Gestalt (*D*).

12. Zusätze.

a) Ist $A_1 = \cdots = A_N = B_1 = \cdots = B_M = 0$, so hat das Minimumproblem genau die Lösung $f' = o$.

Beweis. Für $f \neq o$ ist $(f, f) > (o, o) = 0$, und $f' = o$ erfüllt die Nebenbedingungen.

b) Für $M = 0$ gibt es höchstens eine Lösung des Problems.

Beweis. Sind die Elemente $h_n$ $(n = 1, \ldots, N)$ linear abhängig, so gibt es, falls das betrachtete Minimumproblem überhaupt lösbar ist (falls also nicht etwa die Nebenbedingungen in sich widerspruchsvoll sind), unter den Nebenbedingungen (A): $(f, h_n) = A_n$ überzählige, die weggelassen werden können. Es genügt also, eine linear unabhängige Basis der Elemente $h_n$ $(n = 1, \ldots, N)$ zu betrachten. Dann ist nach dem Satz 9. eine Lösung des Minimumproblems genau dann eindeutig, wenn (E') erfüllt ist. Nach 8. b) und 8. c) ist (E') aber von selbst erfüllt, woraus sich die Eindeutigkeit einer Lösung ergibt.

c) (Existenzbeweis): Für $M = 0$, $N = 1$ hat das Minimumproblem für jedes relle $A_1 = A$ genau eine Lösung, und diese wird durch

$$f' = \begin{cases} o & \text{für } h = o \\ \dfrac{A}{(h, h)} h & \text{für } h \neq o \end{cases} \qquad (h_1 = h)$$

gegeben.

Beweis. Nach dem Satz ist zu zeigen, daß (A), (B), (D) und (E') erfüllt sind. Nach b) ist (E') erfüllt, (B) fällt weg, das behauptete $f'$ ist Element von $\mathfrak{R}$ und ist durch eine Darstellung (D) gegeben, es bleibt also nur noch zu zeigen, daß (A) durch das obige $f'$ erfüllt wird. Dies ergibt sich aber sofort durch Einsetzen.

d) Gibt es $R$ linear unabhängige Elemente in $\mathfrak{R}$, so hat für $M = 0$, $N \leqq R$ und beliebige $A_n$ das Minimumproblem genau eine Lösung, und diese läßt sich mit passenden reellen Konstanten $a_n$ in der Gestalt

$$f' = \sum_{n=1}^{N} a_n h_n \tag{D}$$

schreiben, falls nur die $h_n$ linear unabhängig sind.

Beweis. Man braucht genau wie bei c) nur zu zeigen, daß es ein $f' \in \mathfrak{R}$ in der Gestalt (D) gibt, das (A) erfüllt, d. h. daß immer $(f', h_n) = A_n$ $(n = 1, \ldots, N)$ gilt.

Nach dem Orthonormalisierungsverfahren von E. Schmidt kann man Elemente

$$H_n = \sum_{m=1}^{n} c_{mn} h_m \in \mathfrak{R} \qquad (c_{nn} \neq 0;\ n = 1, \ldots, N)$$

so finden, daß

$$(H_m, H_n) = e_{mn}$$

ist.

Als Umkehrung dieser Gleichungen ergibt sich eine Darstellung

$$h_n = \sum_{m=1}^{n} d_{mn} H_m \qquad (d_{nn} \neq 0;\ n = 1, \ldots, N).$$

Man macht nun den Ansatz

$$f' = \sum_{n=1}^{N} c_n H_n$$

und erhält

$$(f', h_r) = \sum_{n=1}^{N} c_n (H_n, h_r) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sum_{m=1}^{r} d_{mr} (H_n, H_m)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} c_n \sum_{m=1}^{r} d_{mr} e_{nm} = \sum_{n=1}^{r} c_n d_{nr}$$

für $r = 1, \ldots, N$. Soll nun $(f', h_r) = A_r$ $(r = 1, \ldots, N)$ sein, so sind dadurch die $c_n$ rekurrent eindeutig bestimmt. Mit diesem $c_n$ wird

$$f' = \sum_{m=1}^{N} c_m H_m = \sum_{m=1}^{N} c_m \sum_{n=1}^{m} c_{nm} h_n = \sum_{n=1}^{N} h_n \sum_{m=n}^{N} c_m c_{nm} = \sum_{n=1}^{N} a_n h_n,$$

besitzt also die Gestalt (D) und erfüllt nach Konstruktion auch (A). Dieses $f'$ löst das Minimumproblem und ist nach b) das einzige.

e) Ist $\alpha$) $N = 0$ oder $\beta$) $A_1 = \cdots = A_N = 0$

aber in beiden Fällen $\quad B_1^2 + \cdots + B_M^2 \neq 0,$

so ist das Minimumproblem sicher nicht eindeutig lösbar.

Beweis. Hat man in $f'$ eine Lösung des Minimumproblems gefunden, die (A) und (B) befriedigt, so genügt offenbar auch $-f'$ den Bedingungen (A) und (B) und es gilt

$$(-f', -f') = (f', f').$$

$f' = o$ ist wegen $B_1^2 + \cdots + B_M^2 \neq 0$ nicht möglich.

f) Nach 9. wird das betrachtete Minimumproblem durch ein Element $f' \in \mathfrak{R}$ gelöst, wenn es eine Darstellung (D) gibt, wenn $f'$ die Bedingungen (A) und (B) erfüllt und wenn (E) erfüllt ist. Um bei gegebenen Elementen $h_n \in \mathfrak{R}$ und $g_m \in \mathfrak{R}_0$ für beliebige reelle Zahlen $A_n$ und $B_m$ $(n = 1, \ldots, N,\ m = 1, \ldots, M)$ eine Lösung des Minimumproblems zu erhalten, liegt es daher nahe, nach einem Element $f' \in \mathfrak{R}$ zu

suchen, das bei vorläufig noch beliebigen reellen Zahlen $a_n$ und $b_m$ die Gleichung (D) erfüllt. Kann man es dann durch Verfügen über die $M+N$ Konstanten $a_n$ und $b_m$ erreichen, daß dieses $f'$ auch den Bedingungen (A) und (B) genügt, und ergibt sich noch, daß mit den so bestimmten Konstanten $b_m$ die Ungleichung (E) erfüllt ist, so hat man in $f'$ eine Lösung des gegebenen Minimumproblems gefunden.

Die Möglichkeit zur Auflösung von (D) wird noch von den Werten der Konstanten $b_1, \ldots, b_M$ abhängen. Um hierüber eine Aussage machen zu können, ersetzt man in (E) die Menge $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{R}$, betrachtet also die einschränkendere Bedingung

$$(E_0) \qquad \left(k,\, k,\, e - 2\sum_{m=1}^{M} b_m g_m\right) \geqq 0 \qquad \text{für alle } \underline{k \in \mathfrak{R}}$$

(bzw. $(E_0')$, falls das Gleichheitszeichen nur für $k = o$ steht). Damit gilt:

Behauptung. Die Elemente $h_n \in \mathfrak{R}$ und $g_m \in \mathfrak{R}$, sowie die reellen Konstanten $a_n$ und $b_m$ $(n = 1, \ldots, N;\ m = 1, \ldots, M)$ seien beliebig gewählt. Ist dann $(E_0')$ erfüllt, so besitzt (D) höchstens eine Lösung.

Beweis. Man setzt zur Abkürzung

$$h = \sum_{n=1}^{N} a_n h_n \qquad \text{und} \qquad g = \tfrac{1}{2} e - \sum_{m=1}^{M} b_m g_m.$$

Dadurch geht (D) über in $f * g + f^*_* g = h$ und $(E_0')$ in

$$(k, k, g) > 0 \quad \text{für} \quad k \neq o,\ k \in \mathfrak{R}.$$

Seien nun $f_1$ und $f_2$ zwei verschiedene Lösungen von (D), d. h. es gelte:

$$f_1 * g + f_1^*_* g = f_2 * g + f_2^*_* g = h, \quad \text{oder}$$

$$(38) \qquad (f_1 - f_2) * g + (f_1 - f_2)^*_* g = o.$$

Setzt man nun $f_1 - f_2 = f_3 \neq o$, so folgt aus (38):

$$(f_3, f_3 * g) + (f_3, f_3^*_* g) = 2(f_3, f_3, g) = 0,$$

also kann dann $(E_0')$ nicht erfüllt sein, woraus die Behauptung folgt.

## IV. Übertragung des Ergebnisses von III. auf den Raum $L_p$.

13. Als Verwirklichung des abstrakten Raumes $\mathfrak{R}$ wird nun der Raum $L_p$ betrachtet. $L_p$ ist ein Vektorraum, das Element $o$ ist durch die Funktion $o(x) = 0$ (fast überall) gegeben. Das innere Produkt zweier Elemente aus $L_p$ soll durch Gleichung (10) von S. 27 definiert werden. Dieses hat die in S. b) geforderten Eigenschaften (11). Als Unterraum $\mathfrak{R}_0$ werde die Gesamtheit der in $\langle 0, \pi \rangle$ absolutstetigen Funktionen gewählt.

Sei nun $f \in L_p$, $g \in L_p$, $h(x)$ absolutstetig in $\langle 0, \pi \rangle$. Dann ist auch $gh \in L_p$, nach 5. existiert also das Integral

$$\int_0^\pi \int_0^\pi f(x)\, g(y)\, h(y)\, S(x, y)\, dx\, dy.$$

Damit erklärt man das dreifache Produkt von 8. c) durch

$$(f, g, h) = \int_0^\pi \int_0^\pi f(x)\, g(y)\, h(y)\, S(x, y)\, dx\, dy \tag{39}$$

für $f \in L_p$, $g \in L_p$, $h(x)$ absolutstetig. Es gilt mit reellen Konstanten $a, b, c$:

$$(af, bg, ch) = abc\,(f, g, h) \qquad \text{und}$$

$$(f_1 + f_2, g, h) = (f_1, g, h) + (f_2, g, h),$$

sowie mit $g_1 + g_2$ statt $g$, $h_1 + h_2$ statt $h$ entsprechend. Das dreifache Produkt $(f, g, h)$ hat also die in 8. c) geforderten Eigenschaften, wenn man noch als Element $e \in \mathfrak{R}_0$ die Funktion $e(x) = 1$ wählt, denn es ist offenbar $(f, g, e) = (f, g)$. Es bleibt nur noch zu überlegen, was $g * h$ und $f \overset{*}{*} h$ bedeuten soll.

Nach 8. c) und (39) sollte gelten

$$\int_0^\pi \int_0^\pi f(x)\, g(y)\, h(y)\, S(x, y)\, dx\, dy = (f, g, h) = (f, g * h) =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^\pi f(x)\, [g * h](y)\, S(x, y)\, dx\, dy.$$

Das ist der Fall für

$$[g * h](x) = g(x)\, h(x) \qquad (g \in L_p,\ h(x) \text{ abs. stetig}). \tag{40 a}$$

Ebenso sollte gelten:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi f(x)\, g(y)\, h(y)\, S(x, y)\, dx\, dy = (f, g, h) = (f \overset{*}{*} h, g) =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^\pi [f \overset{*}{*} h](x)\, g(y)\, S(x, y)\, dx\, dy.$$

Nach (8) von S. 27 wird daraus

$$\int_0^\pi Z(x, f)\, g(x)\, h(x)\, dx = \int_0^\pi \int_0^\pi f(x)\, g(y)\, h(y)\, S(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\pi \int_0^\pi [f \overset{*}{*} h](x)\, g(y)\, S(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\pi Z(x, f \overset{*}{*} h)\, g(x)\, dx.$$

Dies ist der Fall, wenn

$$Z(x, f \overset{*}{*} h) = Z(x, f)\, h(x) \tag{40 b}$$

gesetzt wird, womit nach (8) auch

$$[f \overset{*}{*} h](x) = \int_0^{\pi}{}' \frac{d}{dy} [Z(y, f)\, h(y)]\, H(y, x)\, dy \tag{40 c}$$

eindeutig erklärt ist. Aus (40 a) und (40 c) sieht man, daß $f * e = f \overset{*}{*} e = f$ ist, wenn man $e$ wie oben wählt.

Mit diesen Festsetzungen besitzt der Raum $L_p$ die in 8. geforderten Eigenschaften. Wählt man also mit der $p$-ten Potenz integrierbare Funktionen $h_n(x)$ $(n = 1, \ldots, N)$, sowie totalstetige Funktionen $g_m(x)$ $(m = 1, \ldots, M)$, so läßt sich das Minimumproblem von 9. auch in $L_p$ formulieren und die Ergebnisse von III übertragen sich auf den Raum $L_p$.

14. Nach den Überlegungen von 12. f) sucht man zur Behandlung des Minimumproblems zuerst die Gleichung (D) zu lösen. Dabei werden an die Funktionen $g_m(x)$ noch weitergehende Anforderungen als in 13. gestellt.

Voraussetzung. Die $N$ Funktionen $h_n(x)$ $(n = 1, \ldots, N)$ seien mit der $p$-ten Potenz integrierbar; die $M$ Funktionen $g_m(x)$ $(m = 1, \ldots, M)$ seien zweimal stetig differenzierbar mit $g'_m(0) = g'_m(\pi) = 0$ und ihre zweite Ableitung möge in $\langle 0, \pi \rangle$ gleichmäßig einer Lipschitz-Bedingung genügen. $a_n$ und $b_m$ seien beliebige reelle Konstanten.

Definition. Man setzt (vgl. 12. f)

$$h(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n\, h_n(x) \quad \text{und} \quad g(x) = \tfrac{1}{2} - \sum_{m=1}^{M} b_m\, g_m(x).$$

Dann ist auch $h \in L_p$ und $g'(x)$ genügt den bei 6. angegebenen Voraussetzungen. (D) erhält damit die Gestalt

$$[f * g](x) + [f \overset{*}{*} g](x) = h(x) \tag{41}$$

und, wenn man gemäß (8) in den Raum $\mathfrak{L}_p$ übergeht und (40 a) und (40 b) beachtet:

$$Z(x, f\, g) + Z(x, f)\, g(x) = Z(x, h). \tag{42}$$

Weiter werde im $M$-dimensionalen Euklidischen Raum der Veränderlichen $b_1, \ldots, b_M$ die Menge der „Punkte“ $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_M)$, für die $(E'_0)$ erfüllt ist, mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet. $\mathfrak{B}$ enthält den Nullpunkt, denn für $b_1 = \cdots = b_M = 0$ wird $(E'_0)$ zu $(k, k, e) = (k, k) > 0$ für $k \neq o$ (vgl. 8. c). Ist $(E'_0)$ für $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ erfüllt, so auch für $\lambda \mathfrak{b}_1 + \mu \mathfrak{b}_2$ $(\lambda + \mu = 1;\ \lambda, \mu \geqq 0)$. Also ist $\mathfrak{B}$ konvex. Nennt man noch $\mathfrak{B}_0$ die Menge der inneren Punkte von $\mathfrak{B}$, so gilt:

Behauptung. Die Gleichung (D) in der Gestalt (42) hat auf $\mathfrak{B}_0$ eine, also nach 12. f) genau eine, Lösung $Z^*(x, f)$ aus $\mathfrak{L}_p$.

Beweis. a) Wegen der Stetigkeit der Funktionen $g_m(x)$ ist sicher für genügend kleine $b_m$ $(m = 1, \ldots, M)$ die Funktion $g(x) > 0$ in $\langle 0, \pi \rangle$. Tatsächlich ist sogar auf der ganzen Menge $\mathfrak{B}_0$ immer $g(x) > 0$:

Gibt es nämlich bei festgehaltenen Konstanten $b_m$ ein $x$ aus $\langle 0, \pi \rangle$ mit $g(x) < 0$, so ist aus Stetigkeitsgründen $g(x) < 0$ in einem ganzen Intervall $\langle a, b \rangle$ aus $\langle 0, \pi \rangle$. Für

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } \langle a, b \rangle \\ 0 & \text{sonst in } \langle 0, \pi \rangle \end{cases}$$

gilt dann aber wegen $S(x, y) > 0$ in $0 < x, y < \pi$:

$$(k, k, g) = \int_0^\pi \int_0^\pi k(x)\, k(y)\, g(y)\, S(x, y)\, dx\, dy < 0,$$

d. h. für dieses $k \in L_p$ ist $(E_0')$ nicht erfüllt. Also kann der Punkt $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_M)$ nicht aus $\mathfrak{B}_0$ sein.

Für alle Punkte $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_M)$ des $M$-dimensionalen Euklidischen Raumes, für die es ein $x$ aus $\langle 0, \pi \rangle$ mit $g(x) = 0$ gibt, gibt es wegen der Stetigkeit der Funktionen $g_m(x)$ beliebig nahe [11]) Punkte $\mathfrak{b}$, zu denen es ein $x$ mit $g(x) < 0$ gibt. Auf dem offenen Kern $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{B}$ gilt also für alle $x$ aus $\langle 0, \pi \rangle$

$$g(x) > 0.$$

b) Da $g(x)$ den bei 6. verlangten Voraussetzungen genügt, kann auf $Z(x, fg)$ in (42) die Gleichung (15) angewendet werden. Dies gibt

$$2\, Z(x, f)\, g(x) - \int_0^x Z(y, f)\, g'(y)\, dy - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^x \int_0^\pi Z'(y, f)\, \frac{\overline{g}(s) \sin s - \overline{g}(y) \sin y}{\cos s - \cos y}\, dy\, ds = Z(x, h).$$

Differentiation liefert daraus

$$2\, Z'(x, f)\, g(x) + Z(x, f)\, g'(x) - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Z'(y, f)\, \frac{\overline{g}(x) \sin x - \overline{g}(y) \sin y}{\cos x - \cos y}\, dy = Z'(x, h).$$

Diese Gleichung wird wegen $g(x) > 0$ offenbar durch

$$Z(x, f) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{g(y)}} \left\{ Z'(y, h) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Z'(t, f)\, \frac{\overline{g}(y) \sin y - \overline{g}(t) \sin t}{\cos y - \cos t}\, dt \right\} dy \tag{43}$$

[11]) Im Sinne der üblichen Metrik des Euklidischen Raumes.

befriedigt. Durch partielle Integration[12]) und Vertauschung der Integrationsreihenfolge erhält man aus (43):

$$Z(x,f) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \int_0^x \frac{Z'(y,h)}{\sqrt{g(y)}}\, dy - \tag{44}$$

$$- \frac{1}{2\pi\sqrt{g(x)}} \int_0^\pi Z(y,f) \left( \int_0^x \frac{1}{\sqrt{g(t)}} \frac{d}{dy} \frac{\bar{g}(y)\sin y - \bar{g}(t)\sin t}{\cos y - \cos t}\, dt \right) dy.$$

In (44) hat man aus (42) eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art für $Z(x,f)$ mit stetigem Absolutglied gewonnen. Da $g(x)$ zweimal differenzierbar ist und da $g''(x)$ in $\langle 0, \pi\rangle$ gleichmäßig einer Lipschitz-Bedingung genügt, so gilt dies auch für $\bar{g}(x)$ (vgl. J. Priwaloff[6])). Dann ist nach 6.

$$\frac{\bar{g}(x)\sin x - \bar{g}(y)\sin y}{\cos x - \cos y}$$

in $0 \leqq x, y \leqq \pi$ stetig differenzierbar. Also ist auch der Kern der Integralgleichung stetig. Dann hat aber (44) nach den üblichen Sätzen über Integralgleichungen (vgl. etwa G. Hamel[13])) genau eine stetige Lösung $Z^*(x,f)$, denn die zu (44) gehörige homogene Gleichung besitzt nach 12. f) nur triviale Lösungen. Ohne weiteres sieht man noch, daß die Lösung von (44) sicher absolutstetig ist, d. h. es gibt tatsächlich genau eine Funktion $Z^*(x,f) \in \mathfrak{L}_p$, die (44) erfüllt. Da diese Schritte auch rückwärts durchlaufen werden können, hat man in $Z^*(x,f)$ eine, also nach 12. f) die, Lösung der Gleichung (42) gefunden[14]).

Nach (8) entspricht $Z^*(x,f)$ eindeutig eine Funktion

$$f^*(x) = \int_0^\pi Z^{*\prime}(y,f)\, H(y,x)\, dy$$

aus $L_p$ und diese ist Lösung von (D) in der Gestalt (41).

15. Ist es nun möglich, durch Verfügen über die Parameter $a_n$ und $b_m$ $(m = 1, \ldots, M;\ n = 1, \ldots, N)$ zu erreichen, daß $f^*(x)$ die Nebenbedingungen

$$\int_0^\pi \int_0^\pi f(x)\, h_n(y)\, S(x,y)\, dx\, dy = A_n \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{45}$$

und

$$\int_0^\pi \int_0^\pi f(x)\, f(y)\, g_m(y)\, S(x,y)\, dx\, dy = B_m \quad (m = 1, \ldots, M) \tag{46}$$

erfüllt?

---

[12]) Dabei ist $Z(0,f) = Z(\pi,f) = 0$ zu beachten (vgl. 4.).

[13]) G. Hamel, Integralgleichungen. Berlin 1937 bei J. Springer.

[14]) An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, daß die obigen Voraussetzungen noch gemildert werden können. Es genügt z. B. schon, wenn die Funktionen $g_m''(x)$ nur stückweise gleichmäßig einer Lipschitz-Bedingung genügen.

Um diese Frage klären zu können, werde angenommen, daß die Funktionen $h_n(x)$ linear unabhängig sind[15]), der Punkt $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_M)$ sei aus $\mathfrak{B}_0$. Weiter bezeichnet man die Lösung von (44) für $a_r = 1$, $a_n = 0$ für $n \neq r$ mit $Z_r^*(x)$, wozu nach (8) die Funktionen $f_r^*(x)$ aus $L_p$ gehören. Es ist also

$$Z^*(x, f) = \sum_{n=1}^{N} a_n Z_n^*(x) \quad \text{und} \quad f^*(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n^*(x).$$

Mit den Funktionen $h_n(x)$ sind auch die $Z_n^*(x)$ linear unabhängig. Denn gibt es Konstanten $a_n$ $(n = 1, \ldots, N)$ derart, daß $\sum_{n=1}^{N} a_n Z_n^*(x) = 0$ ist, so folgt aus (44)

$$\frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \int_0^x \frac{Z'(y, h)}{\sqrt{g(y)}}\, dy = 0 \quad \text{oder} \quad Z'(y, h) = 0.$$

Nach (8) ist dann auch $h(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n h_n(x) = 0$, woraus wegen der linearen Unabhängigkeit der $h_n(x)$ auch $a_n = 0$ für $n = 1, \ldots, N$ folgt. Genau wie bei dem Beweise zu 12. d) findet man dann für $N \neq 0$, daß es für feste Punkte $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_M)$ aus $\mathfrak{B}_0$ immer reelle Konstanten $a_n^*$ $(n = 1, \ldots, N)$ so gibt, daß

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n^* f_n^*(x)$$

die Nebenbedingungen (45) erfüllt. Dabei werden sowohl die $a_n^*$ als auch die $f_n^*$ von den $b_m$ abhängen.

Betrachtet man im $M$-dimensionalen Raum die Punkte mit den Komponenten

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f^*(x) f^*(y) g_m(y) S(x, y)\, dx\, dy \quad (m = 1, \ldots, M),$$

so entspricht durch die eben genannte Abhängigkeit jedem Punkt $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{B}_0$ ein derartiger Punkt. Bezeichnet man die Gesamtheit dieser Punkte des $M$-dimensionalen Raumes mit $\mathfrak{G}$, so entspricht auch jedem Punkt von $\mathfrak{G}$ eindeutig ein Punkt von $\mathfrak{B}_0$, denn auf $\mathfrak{B}_0$ und also auch auf $\mathfrak{G}$ war ja $(E_0')$ erfüllt, so daß dort das Minimumproblem nur eine Lösung hat. Dabei wird $\mathfrak{G}$ von den Konstanten $A_n$ der Nebenbedingungen (45) abhängen.

## V. Ergebnis.

Voraussetzung. a) Die $N$ Funktionen $h_n(x)$, $(n = 1, \ldots, N)$ seien in $\langle 0, \pi \rangle$ fast überall definiert, linear unabhängig und mit der $p$-ten $(p > 1)$ Potenz integrierbar.

[15]) Nach 12. b) bedeutet diese Annahme keine Einschränkung der Allgemeinheit.

b) Die $M$ Funktionen $g_m(x)$ $(m = 1, \ldots, M)$ seien in $\langle 0, \pi \rangle$ definiert, zweimal differenzierbar mit $g'(0) = g'(\pi) = 0$ und die $g''(x)$ mögen dort gleichmäßig einer LIPSCHITZ-Bedingung genügen.

Bezeichnungen. c) Man setzt zur Abkürzung

$$h(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n h_n(x) \quad \text{und} \quad g(x) = \tfrac{1}{2} - \sum_{m=1}^{M} b_m g_m(x)$$

mit beliebigen reellen Konstanten $a_n$ und $b_m$.

d) Weiter werde gesetzt:

$$H(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin y}{\cos x - \cos y} \quad \text{und} \quad S(x, y) = \frac{1}{\pi} \log \frac{\sin \frac{x + y}{2}}{\sin \left| \frac{x - y}{2} \right|}.$$

e) Der offene Kern aus der Menge der „Punkte“ $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_M)$ im $M$-dimensionalen Euklidischen Raum, für die

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} k(x)\, k(y)\, g(y)\, S(x, y)\, dx\, dy > 0$$

für alle $k \neq 0$, $k \in L_p$ bleibt, möge mit $\mathfrak{B}_0$ bezeichnet werden.

f) Die FREDHOLMsche Integralgleichung zweiter Art

$$\begin{aligned} Z(x, f) = {} & \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \int_0^{x} \frac{Z'(y, h)}{\sqrt{g(y)}}\, dy - \\ & - \frac{1}{2\pi\sqrt{g(x)}} \int_0^{\pi} Z(y, f) \left( \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{g(t)}} \frac{d}{dy} \frac{\bar{g}(y) \sin y - \bar{g}(t) \sin t}{\cos y - \cos t}\, dt \right) dy \end{aligned} \tag{44}$$

hat für alle $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}_0$ und beliebige $a_n$ $(n = 1, \ldots, N)$ genau eine Lösung $Z^*(x, f)$ aus $\mathfrak{L}_p$, der nach (8) eindeutig ein

$$f^*(x) = \int_0^{\pi}{}' Z^{*\prime}(y, f)\, H(y, x)\, dy$$

aus $L_p$ entspricht. Dabei ist

$$Z'(y, h) = \int_0^{\pi}{}' h(t)\, H(y, t)\, dt \quad \text{und} \quad \bar{g}(y) = \int_0^{\pi}{}' g(t)\, H(y, t)\, dt.$$

g) Bei vorläufig noch beliebigem $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}_0$ kann man für $N \neq 0$ die Konstanten $a_n$ stets eindeutig so bestimmen, daß die Nebenbedingungen

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, h_n(y)\, S(x, y)\, dx\, dy = A_n \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{45}$$

durch die Funktion $f^*(x)$ erfüllt werden.

h) Durchläuft nun $\mathfrak{b}$ die Menge $\mathfrak{B}_0$, so möge im $M$-dimensionalen Raum der Punkt mit den Komponenten

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f^*(x)\, f^*(y)\, g_m(y)\, S(x,y)\, dx\, dy \quad (m = 1, \ldots, M)$$

die Menge $\mathfrak{G}$ durchlaufen. Die dadurch vermittelte Abbildung zwischen $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{G}$ ist eineindeutig, $\mathfrak{G}$ hängt noch von den Konstanten $A_n$ in (45) ab.

Satz. Unter den angegebenen Voraussetzungen und mit den gewählten Bezeichnungen hat das Problem, das Funktional

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, f(y)\, S(x,y)\, dx\, dy$$

durch ein $f \in L_p$ unter den Nebenbedingungen

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, h_n(y)\, S(x,y)\, dx\, dy = A_n \quad (n = 1, \ldots, N) \tag{45}$$

und

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, f(y)\, g_m(y)\, S(x,y)\, dx\, dy = B_m \quad (m = 1, \ldots, M) \tag{46}$$

zum Minimum zu machen für $N \neq 0$ genau die Lösung $f^*(x)$, wenn $(B_1, \ldots, B_M)$ aus der Menge $\mathfrak{G}$ ist. Die $A_n$ $(n = 1, \ldots, N)$ dürfen dabei beliebige reelle Zahlen sein.

Für $M = 0$ ist das Minimumproblem also immer eindeutig lösbar. Für $M \neq 0$, $N = 0$ schrumpft $\mathfrak{G}$ auf den Nullpunkt $(0, \ldots, 0)$ zusammen und außer für $(B_1, \ldots, B_M) = (0, \ldots, 0)$ gibt es keine eindeutig bestimmte Lösung des Minimumproblems.

## VI. Beispiele.

Sind die Funktionen $g_m(x)$ trigonometrische Polynome, so wird die Integralgleichung (44) besonders einfach. Sei etwa

$$g_m(x) = \sum_{r=0}^{R_m} c_{mr} \cos r x \qquad (m = 1, \ldots, M),$$

also

$$\bar{g}_m(x) = -\sum_{r=1}^{R_m} c_{mr} \sin r x \qquad (m = 1, \ldots, M).$$

Mit $\bar{g}(x) = \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{M} b_m g_m(x)$ wird dann nach (13 b)

$$\begin{aligned} \frac{\bar{g}(x)\sin x - \bar{g}(y)\sin y}{\cos x - \cos y} &= \sum_{m=1}^{M} b_m \sum_{r=1}^{R_m} c_{mr} \frac{\sin r x \sin x - \sin r y \sin y}{\cos x - \cos y} \\ &= -\sum_{m=1}^{M} b_m \sum_{r=1}^{R_m} c_{mr} \left\{ \cos r x - \cos r y + 2 \sum_{n=0}^{r-1} \cos n x \cos (r-n) y \right\} \\ &= \sum_{r=1}^{R} \sum_{n=0}^{r} d_{rn} \cos r x \cos (n-r) y \end{aligned} \tag{47}$$

mit reellen Koeffizienten $d_{rn}$.

(47) in (43) eingetragen ergibt nach partieller Integration

$$Z(x,f)=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\int_0^x\frac{Z'(y,h)}{\sqrt{g(y)}}\,dy-$$

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{g(x)}}\int_0^x\frac{1}{\sqrt{g(t)}}\Big(\int_0^\pi Z(y,f)\,\frac{d}{dy}\sum_{r=1}^{R}\sum_{n=0}^{r}\cos r\,y\cos(n-r)\,t\,dy\Big)\,dt \tag{48}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\int_0^x\frac{Z'(y,h)}{\sqrt{g(y)}}\,dy+$$

$$+\frac{1}{2\pi\sqrt{g(x)}}\sum_{r=1}^{R}\sum_{n=0}^{r}r\,d_{rn}\int_0^x\frac{\cos(n-r)t}{\sqrt{g(t)}}\Big(\int_0^\pi Z(y,f)\sin r\,y\,dy\Big)\,dt.$$

Sei nun

$$Z(x,f)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin n\,x.$$

Damit wird (48) zu

$$Z(x,f)=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\int_0^x\frac{Z'(y,h)}{\sqrt{g(y)}}\,dy+ \tag{49}$$

$$+\frac{1}{2\pi\sqrt{g(x)}}\sum_{r=1}^{R}\sum_{n=1}^{r}r\,c_r\,d_{rn}\int_0^x\frac{\cos(n-r)y}{\sqrt{g(y)}}\,dy.$$

Die Integralgleichung (44) hat sich somit bedeutend vereinfacht, denn (49) ist mit (44) gleichwertig, und in (49) sind nur noch die endlich vielen Fourierkoeffizienten $c_r$ für $0\leqq r\leqq R$ unbekannt. Um diese zu bestimmen, multipliziert man (49) mit $\sin m\,x$ und integriert über $\langle 0,\pi\rangle$. Dadurch ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\pi\,c_m=\int_0^\pi\frac{\sin m\,x}{\sqrt{g(x)}}\Big(\int_0^x\frac{Z'(y,h)}{\sqrt{g(y)}}\,dy\Big)\,dx \tag{50}$$

$$(m=1,\ldots,N)$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{R}\sum_{n=1}^{r}r\,c_r\,d_{rn}\int_0^\pi\frac{\sin m\,x}{\sqrt{g(x)}}\Big(\int_0^x\frac{\cos(n-r)\,y}{\sqrt{g(y)}}\,dy\Big)\,dx$$

das sicher eindeutig lösbar ist, solange (44) genau eine Lösung hat. Damit ist die Lösung der Integralgleichung (44) auf die Lösung eines endlichen (!) linearen Gleichungssystems zurückgeführt.

Als besonders einfacher derartiger Fall soll das Minimumproblem mit

$$M=1,\quad g_1(x)=\cos x,\quad N>0\ \text{beliebig}$$

noch näher behandelt werden:

Es ist $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} b \cos x > 0$ in $\langle 0, \pi \rangle$ für $|b| < 1$ und

$$\bar{g}(x) = \tfrac{1}{2} b \sin x.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \frac{\bar{g}(y) \sin y - \bar{g}(t) \sin t}{\cos y - \cos t} &= \frac{b}{2} \frac{d}{dy} \frac{\sin^2 y - \sin^2 t}{\cos y - \cos t} \\ &= -\frac{b}{2} \frac{d}{dy} \frac{\cos^2 y - \cos^2 t}{\cos y - \cos t} \\ &= -\frac{b}{2} \frac{d}{dy} (\cos y + \cos t) \\ &= \frac{b}{2} \sin y. \end{aligned}$$

Trägt man dies in (44) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} Z(x, f) = {} & \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \int_0^x \frac{Z'(y, h)}{\sqrt{g(y)}} \, dy - \\ & - \frac{b}{4\pi \sqrt{g(x)}} \int_0^\pi Z(y, f) \sin y \, dy \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{g(t)}}. \end{aligned} \tag{51}$$

Man kann nun, wie oben besprochen, das Glied

$$\int_0^\pi Z(y, f) \sin y \, dy$$

bestimmen. Einfacher wird es hierbei jedoch, wenn man überlegt, daß $Z(\pi, f) = 0$ sein muß. Man erhält

$$b \int_0^\pi Z(y, f) \sin y \, dy = \frac{2\pi \int_0^\pi \frac{Z'(y, h)}{\sqrt{g(y)}} \, dy}{\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{g(t)}}}.$$

Damit findet man als Lösung von (42)

$$Z^*(x, f) = \frac{1}{\sqrt{1 - b \cos x}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - b \cos y}} \left[ \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\pi} \int_0^{\pi}{}' \frac{h_n(t) \sin t}{\cos y - \cos t} \, dt + A \right] dy \tag{52}$$

mit

$$A = \sum_{n=1}^N a_n \frac{\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1 - b \cos y}} \left( \int_0^{\pi}{}' \frac{h_n(t) \sin t}{\cos y - \cos t} \, dt \right) dy}{\int_0^\pi \frac{dy}{\sqrt{1 - b \cos y}}}$$

für $|b| < 1$, falls dann $(E_v')$ erfüllt ist.

Die Bedingung $(E_0')$ ist jedoch für alle $b$ mit $|b| \leqq 1$ von selbst erfüllt:

Sei $k \in L_p$ und $k(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin n x$.

Dann gilt wegen

$$2\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} k(x) \cos x \sin n x \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} k(x) \sin (n+1) x \, dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} k(x) \sin (n-1) x \, dx$$

$$= (n+1) A_{n+1} + (n-1) A_{n-1} \qquad (A_0 = 0),$$

also

$$k(x) \cos x \sim \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1) A_{n+1} + (n-1) A_{n-1}\} \sin n x$$

nach (9)

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} k(x)\, k(y) \cos y \, S(x,y) \, dx \, dy = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \{(n+1) A_{n+1} + (n-1) A_{n-1}\}$$

$$= \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) A_n A_{n+1}.$$

Damit wird also

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} k(x)\, k(y) [1 - b \cos y] \, S(x,y) \, dx \, dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \{2n A_n - b(2n+1) A_{n+1}\}.$$

Nun ist aber, wie man leicht nachrechnet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \{2n A_n \pm (2n+1) A_{n+1}\} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+\tfrac{1}{2})(A_n \pm A_{n+1})^2 + \tfrac{1}{2} A_1^2 \geqq 0,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $A_1 = A_2 = \cdots = 0$ steht. Also gilt für alle $b$ mit $|b| \leqq 1$:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} k(x)\, k(y) [1 - b \cos y] \, S(x,y) \, dx \, dy > 0 \quad \text{für} \quad k \not\equiv 0, \; k \in L_p,$$

d. h. die Menge $\mathfrak{B}_0$ wird in diesem Falle zu der offenen Strecke $-1 < b < +1$.

Die Abbildung von $\mathfrak{B}_0$ auf $\mathfrak{G}$ ist, wie man sich sofort überlegt, nicht nur eineindeutig, sondern auch in beiden Richtungen stetig. Daher wird auch $\mathfrak{G}$ zu einer offenen Strecke auf der $B_1$-Achse, die durch Angabe ihrer Endpunkte vollständig bestimmt ist. Diese End-

punkte erhält man aus

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f^*(x)\, f^*(y) \cos y\, S(x, y)\, dx\, dy$$

für $b \to -1$ und $b \to +1$, dabei findet man $f^*(x)$ durch Anwendung von (8) auf (52).

Für das betrachtete einfache Minimumproblem mit $M = 1$, $g_1(x) = \cos x$ und beliebiges $N \neq 0$ existiert nach V. also genau eine Lösung für $B_1$ aus $\mathfrak{G}$ und beliebige reelle Konstanten $A_n$. $\mathfrak{G}$ ist eine offene Strecke, deren beide Endpunkte sich durch Auswerten des obigen Doppelintegrals ergeben. Die Lösung ist in (52) bis auf die Konstanten $a_n$ und $b$ explizit angegeben, und diese Konstanten lassen sich, wie in IV. gezeigt wurde, in eindeutiger Weise bestimmen.

(Eingegangen am 2. August 1949.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 1, S. 53—58 (1950).

# Bemerkung über einen Satz des Herrn T. Carleman.

Von

**Vojislav G. Avakumović in Beograd.**

Sei $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots < \lambda_n \to \infty$ und

$$g(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n + x}$$

konvergiere für ein und somit für alle $x > 0$.

Herr T. Carleman hat wohl als erster das asymptotische Verhalten derjenigen $a_n$ untersucht, deren Stieltjes-Transformation $g(x)$ im wesentlichen $= O(e^{-\sqrt{x}})$ bei $x \to \infty$ ist. Dabei müssen, wie üblich, die $a_n$ einer gewissen Bedingung, der sogenannten Konvergenzbedingung genügen. Der diesbezügliche Satz des Herrn T. Carleman, dessen Wortlaut ich aus einer Abhandlung des Herrn N. Wiener[1]) kenne, lautet:

Satz von T. Carleman. *Wenn*

$$g(x) = A \lg x + B + O(e^{-\sqrt{x}}) \text{ bei } x \to \infty$$

*und die $a_n$ der Konvergenzbedingung $a_n \geqq 0$ genügen, so ist für jedes* $0 < \delta < \frac{1}{2}$

$$\lim_{x=\infty} x^{\frac{1}{2}-\delta} \sum_{x < \lambda_n < x + x^{\frac{1}{2}+\delta}} a_n = A.$$

Es ist handlicher, die Stieltjes-Transformation in Integralform

$$f(x) = x \int_0^{\infty} \frac{d\{S(u)\}}{u + x}$$

zu schreiben. Dabei ist $S(u)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung auf jeder endlichen Strecke und

$$f(x) = O(e^{-\sqrt{x}}), \text{ wenn } x \to \infty. \tag{1}$$

Dann läßt sich der Satz des Herrn T. Carleman folgendermaßen aussprechen:

*Wenn $f(x)$ der Bedingung* (1) *genügt und $S(u) + A \lg u$ nicht abnimmt, so ist für jedes* $0 < \delta < \frac{1}{2}$,

$$\lim_{x=\infty} x^{\frac{1}{2}-\delta} \{S(x + x^{\frac{1}{2}+\delta}) - S(x)\} = 0.$$

---

[1]) N. Wiener, „A theorem of Carleman", The science reports of national Tsing Hua University (A), vol. III (1936), pp. 291—298.

Wird hier

$$S(u) = \sum_{\lambda_n \leqq u} a_n - A \lg u - B$$

gesetzt, so erhält man die ursprüngliche Fassung des CARLEMAN'schen Satzes.

In der vorliegenden Note zeige ich, daß man eine $O$-Abschätzung der Funktion $S(u)$ erhalten kann, aus welcher dann die Behauptung des CARLEMAN'schen Satzes unmittelbar folgt. Der zu beweisende Satz lautet:

Satz A. *Wenn $f(x)$ der Bedingung* (1) *und $S(u)$ der Bedingung*

$$(K-O) \qquad \sqrt{u}\,\{S(v) - S(u)\} > -m \text{ für jedes } u \leqq v \leqq u + \sqrt{u}$$

*genügt, so ist*

$$(2) \qquad \sqrt{u}\, S(u) = O(1), \text{ wenn } u \to \infty.$$

Dieser Satz enthält offenbar denjenigen des Herrn T. CARLEMAN. Für $\delta = 0$ bekommt man aber nur

$$(3) \qquad \sqrt{u}\,\{S(u + \sqrt{u}) - S(u)\} = O(1), \text{ wenn } u \to \infty.$$

Das $O$-Zeichen kann weder in (2) noch in (3) durch ein $o$-Zeichen ersetzt werden, sogar auch dann nicht, wenn $S(u)$ der mehr fordernden Bedingung

$$(4) \qquad |u\, S'(u)| < 1$$

genügt. Ein derartiges $S(u)$ ist zum Beispiel

$$S(u) = \int_u^\infty \frac{\sin \sqrt{\tau}}{\tau}\, d\tau.$$

In diesem Falle ist nämlich:

$$a) \qquad f(x) = -\pi e^{-\sqrt{x}},$$

welche Beziehung aus der Formel

$$\int_0^\infty \frac{\cos s\sqrt{u}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{u+x} = \pi \frac{e^{-|s|\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

folgt, indem diese zunächst beiderseits nach $s$ von 1 bis $y$ integriert und dann $y \to \infty$ ausgeführt wird,

$$b) \qquad \lim_{u=\infty} \begin{matrix}\sup \\ \inf\end{matrix} \sqrt{u}\, S(u) = \pm 2$$

und

$$\lim_{u=\infty} \begin{matrix}\sup \\ \inf\end{matrix} \sqrt{u}\,\{S(u + \sqrt{u}) - S(u)\} = \pm 4 \sin \tfrac{1}{4}$$

wie dies aus

$$\sqrt{u}\, S(u) = 2\cos\sqrt{u} - 2\int_0^\infty \cos\sqrt{u}\, t\, \frac{dt}{t^2} = 2\cos\sqrt{u} + o(1),\ u \to \infty$$

ersichtlich ist und schließlich

c) die Bedingung (4) offenbar erfüllt, da $u\, S'(u) = -\sin\sqrt{u}$ ist.

Das Analogon zu Satz A für die in der rechten Halbebene konvergente LAPLACE-Transformation

$$h(t) = \int_0^\infty e^{-tu}\, d\{S(u)\}$$

lautet:

Satz B. *Genügt $h(t)$ der Bedingung*

$$h(t) = O\left(e^{-\frac{1}{t}}\right),\ \textit{wenn}\ t \to 0 \tag{1'}$$

*und $S(u)$ der Bedingung des Satzes* A, *so ist*

$$\sqrt{u}\, S(u) = O(1),\ \textit{wenn}\ u \to \infty.$$

Beweis des Satzes A. Zunächst beweise ich, daß

$$S(v) - S(u) > -\frac{m}{\sqrt{u}} - m' \lg \frac{v}{u} \tag{5}$$

für jedes $v \geqq u$ und genügend große $u$ ist, falls nur $m$ passend gewählt wird. Ich setze abkürzend $\alpha(t) = e^{\sqrt{t}}$ und bezeichne mit $\beta(t)$ die zu $\alpha(t)$ inverse Funktion $(\lg t)^2$. Ferner bestimme ich ein $\lambda > 1$ derart, daß $\beta(\lambda\,\alpha(x)) \leqq x + \sqrt{x}$ für genügend große $x$ ist. Dann ist

$$\sqrt{x}\,\{S(x') - S(x)\} > -m \tag{6}$$

für jedes $x$ der Strecke $(x, \beta(\lambda\,\alpha(x)))$. Ich setze zur Abkürzung

$$x_{\nu+1} = \beta(\lambda\,\alpha(x_\nu)) = \beta(\lambda^\nu\,\alpha(x_0)) \quad \text{für } \nu = 0, 1, \ldots, n$$

und grenze die Zahl $n$ derart ab, daß $x_n \leqq y < x_{n+1}$. Ferner setze ich in (6) zunächst $x_\nu$ statt $x'$ und $x_{\nu-1}$ statt $x$, wobei $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ sein soll; und schließlich $y$ statt $x'$ und $x_n$ statt $x$. Werden die auf diese Weise gebildeten Ungleichungen einschließlich (6) addiert, so bekommt man

$$S(y) - S(x) > -\frac{m}{\sqrt{x}} - m\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{1}{\sqrt{\beta(\lambda^\nu\,\alpha(x))}}.$$

Das zweite Glied rechter Hand läßt sich mittels

$$\int_0^n \frac{d\nu}{\sqrt{\beta(\lambda^\nu\,\alpha(x))}}$$

majorieren, welches Integral den Wert $\frac{1}{2\lg\lambda} \lg \frac{x_n}{x}$ hat und demnach

nicht größer als $\frac{1}{2\lg\lambda}\lg\frac{y}{x}$ sein kann. Damit ist die Behauptung schon bewiesen, falls $m' \geqq \frac{m}{2\lg\lambda}$ angenommen wird.

Aus (5) folgt insbesondere: Man kann die Zahlen $m''$ und $m'''$ derart wählen, daß

$$S(v) - S(u) > -m'' \tag{7}$$

für $u \leqq v \leqq 2u$ und, falls noch $S(u) = O(1)$, $u \to \infty$ vorausgesetzt wird, daß

$$v\,S(v^2) - u\,S(u^2) > -m''' \tag{8}$$

für $u \leqq v \leqq u+1$ ist, wenn nur $u$ genügend groß. Die erste dieser Behauptungen ist in (5) unmittelbar enthalten, die zweite folgt aus (5) und der Identität

$$v\,S(v^2) - u\,S(u^2) = u\{S(v^2) - S(u^2)\} + (v-u)\,S(v^2).$$

Aus

$$q(t) = \int_0^t \frac{d\{S(u)\}}{u+x}$$

folgt

$$S(X) = \int_0^X (t+x)\,d\{q(t)\} = (X+x)\,q(X) - \int_0^X q(t)\,dt,$$

woraus sich

$$S(X) = o(X) \text{ bei } X \to \infty \tag{9}$$

ergibt, da $\lim_{t=\infty} q(t)$ vorhanden ist. Wird jetzt

$$\int_0^X \frac{d\{S(u)\}}{u+x}$$

teilweite integriert und, unter Beachtung von (9), der Grenzübergang $X \to \infty$ ausgeführt, so erhält man

$$f(x) = S(0) + x\int_0^\infty \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du. \tag{10}$$

Nun schließe ich weiter: Aus (1) (gebraucht wird nur $f(x) = O(1)$, $x \to \infty$), (7) und (10) folgt

$$S(u) = O(1), \text{ wenn } u \to \infty, \tag{11}$$

wie dies Herr O. Szász [2]) auf elementare Weise bewiesen hat. Also: erstens genügt $S(u)$ tatsächlich der Bedingung (8), und zweitens ist

$$f(x) = O(1), \text{ wenn } x \to 0, \tag{11}$$

wie dies aus (10) und (11) unmittelbar folgt.

[2]) O. Szász, „Über einige Sätze von Hardy und Littlewood", Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Nr. 11 (1930), pp. 316–333.

Nun gehe ich zum Beweis des Satzes A über. Den Ausgangspunkt bildet die bekannte Formel

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin s\sqrt{x}}{u+x}\,dx = e^{-s\sqrt{x}}, \tag{13}$$

in welcher $s$ eine positive Zahl ist.

Wegen (1) und (12) existiert das über $(0, \infty)$ erstreckte Integral von $f(x)\frac{\sin s\sqrt{x}}{sx}$. Da, wie leicht nachweisbar, im derart gebildeten Doppelintegral die Reihenfolge der Integration vertauschbar ist, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x)\,\frac{\sin s\sqrt{x}}{sx}\,dx &= \frac{1}{s}\int_0^\infty d\{S(u)\}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin s\sqrt{x}}{u+x}\,dx \\ &= \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-s\sqrt{u}}\,d\{S(u)\} = \varphi(s).\end{aligned} \tag{14}$$

Ich behaupte zunächst: $\varphi(s)$ ist in der rechten Halbebene einschließlich $s = 0$ regulär.

Der erste Teil der Behauptung folgt aus der Tatsache, daß für reelle positive $s$ die linke Seite und (wegen (11)) auch das an zweiter Stelle rechts in (14) stehende LAPLACE-Integral konvergieren. Bezüglich des zweiten Teiles der Behauptung genügt es zu zeigen, daß die linke Seite von (14) absolut konvergent ist, falls nur $s$ in einem genügend kleinen, um den Nullpunkt gelegenen Kreise liegt. Dies ist eine unmittelbare Folge von (1), (12) und der für jedes komplexwertige $z$ gültigen Ungleichung

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| < 2\,e^{|z|}.$$

Nun setze ich in $\varphi(s)$, $u^2$ statt $u$ und integriere teilweise. Indem ich noch die Ableitung des so gewonnenen Integrals bilde und mit $-\chi(s)$ bezeichne, erhalte ich

$$\chi(s) = \int_0^\infty e^{-su}\,u\,S(u^2)\,du, \tag{15}$$

vorausgesetzt, daß $S(0) = 0$ ist, welche Vorauszetzung o. B. d. A. gemacht werden kann. Da, wie gezeigt, $\varphi(s)$ regulär im Punkte $s = 0$ ist, so habe ich bewiesen: *Die in der rechten Halbebene mittels der Formel* (15) *erklärte und daselbst reguläre Funktion* $\chi(s)$ *ist noch im Punkte* $s = 0$ *regulär.*

Damit ist aber der Beweis des Satzes schon beendet. Denn aus (8) und dem regulären Verhalten von $\chi(s)$ im Punkte $s = 0$ folgt $u\,S(u^2) = O(1)$,

wenn $u \to \infty$, wie dies die Herren A. E. Ingham[3]) und J. Karamata[4]) im Anschluß an die Arbeiten des Herrn N. Wiener[5]) bewiesen haben.

Auf dieselbe Weise kann man einen den Satz A ergänzenden Satz beweisen: *Wird die Bedingung* $(K-O)$ *durch die wesentlich mehr fordernde Bedingung*

$$\liminf_{u=\infty} \sqrt{u}\,\{S(v)-S(u)\} = 0 \text{ für jedes } u \leqq v \leqq u+1$$

*ersetzt, so ist*

$$\lim_{u=\infty} \sqrt{u}\,S(u) = 0.$$

Beweis des Satzes B. Der Beweis dieses Satzes entspricht vollkommen demjenigen des Satzes A. Wie vorher genügt es zu beweisen, daß

$$\varphi(s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-s\sqrt{u}}\,d\{S(u)\}$$

in der rechten Halbebene einschließlich $s = 0$ regulär ist. Die Rolle der Formel (13) übernimmt jetzt die für positive $s$ und $u$ gültige Formel

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}-tu}\,t^{-\frac{3}{2}}\,dt = \frac{1}{s}\,e^{-s\sqrt{u}}$$

und es ist leicht einzusehen, daß für positive $s$

$$\varphi(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}}\,t^{-\frac{3}{2}}\,h(t)\,dt \tag{16}$$

ist. Wegen (1′) ist die linke Seite von (16) für alle $s$ des Gebietes $|s| < 2$ absolut konvergent.

[3]) A. E. Ingham, "On Wiener's method in Tauberian theorems", Proc. London Mth. Soc., 38 (1935), pp. 458–480.

[4]) J. Karamata, „Über einen Satz von H. Heilbron und E. Landau", Publ. Math. de L'Univ. de Belgrade, Tome V (1936), pp. 28–38.

[5]) N. Wiener, "Tauberian theorems", Ann. of Math. 33 (1932), pp. 1–100.

(Eingegangen am 27. September 1949.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 1, S. 59—69 (1950).

# Über den Aufbau der Ordnungszahlen.

Von

**Walter Neumer** in Worms.

## Vorbemerkung.

In seiner Abhandlung „Über die Begründung der Mengenlehre" [5] hat E. Kamke gezeigt, daß derjenige Teil der Mengenlehre, der sich mit den Ordnungszahlen befaßt, für sich behandelt und mit rein „ordinalen" Mitteln begründet werden kann, daß sich dabei die Cantorschen Anfangszahlen in stufenweisem Fortschreiten charakterisieren lassen (ohne Zuhilfenahme des Wohlordnungssatzes und des Mächtigkeitsbegriffs), und daß darüber hinaus diese Methode imstande ist, zu den von Hausdorff so genannten „Zahlen von exorbitanter Größe" zu führen. Ferner begründet Kamke den Standpunkt, daß die einzige echte, aber hier vermeidbare Antinomie der Mengenlehre die der Menge aller Ordnungszahlen — oder eine analoge — ist.

Die nachfolgende Darstellung[1]) beschäftigt sich ebenfalls mit dem „ordinalen" Aufbau der Reihe der Ordnungszahlen. Hierbei wird aber nicht ganz so konstruktiv verfahren wie in der genannten Abhandlung von Kamke, insofern der allgemeine Begriff der Ordnungszahl benützt wird, um Mengen wie „die Menge aller Ordnungszahlen mit einer wohlbestimmten Eigenschaft" zu definieren, wodurch eine sonst wohl kaum erreichbare Formalisierung der Ergebnisse gewonnen wird. Auch für den rein konstruktiven Standpunkt ist die Verwendung eines abstrakten Mengen- und Ordnungszahlenbegriffs (der sich nach den ersten konstruierenden Schritten spontan herstellt) erforderlich: ohne diese Begriffe ist es ja gar nicht möglich, die konstruktive — oder irgend eine andere — Methode auf allgemeine Weise zu beschreiben. Es ist eben nur darauf zu achten, daß eine „wohlgeordnete Menge aller Ordnungszahlen von einer gewissen Eigenschaft" nicht paradox ausfällt, d. h. daß nach Bildung des Ordnungstypus einer solchen Menge nicht wieder eine neue Zahl mit der betreffenden Eigenschaft angegeben werden kann. Das eigentliche Prinzip aber, wonach im folgenden die regulären Limeszahlen eingeführt werden, ist natürlich dasselbe, welches Kamke in seiner Abhandlung demonstriert hat. Wir zeigen zunächst (§ 1), wie dieses Prinzip auch auf dem Boden der Cantorschen Anfangszahlen gefunden und sinnvoll angewendet werden kann.

[1]) Sie stammt aus Betrachtungen, welche ohne Kenntnis der Kamkeschen Abhandlung durchgeführt und 1946 durch die in § 1 zitierte Bemerkung Hausdorffs veranlaßt worden waren.

## § 1.

## Zahlen von exorbitanter Größe.

In seinem Lehrbuch „Mengenlehre“ [2][2]) macht Hausdorff folgende Bemerkung: „Reguläre Anfangszahlen mit Limeszahlindex sind bisher nicht bekannt; sie müßten von exorbitanter Größe sein“. Nun ist die kleinste reguläre Anfangszahl mit Limeszahlindex, wenn es solche gibt, durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet: Sie ist die Ordnungszahl derjenigen Menge von Ordnungszahlen, welche einschließlich ihrer nicht verschwindenden Vorgänger mit 1, $\omega$ oder einer regulären Zahl der Form $\omega_\nu+1$ konfinal sind[3]). Wir stellen daher folgende Definition auf:

*Eine Ordnungszahl $\alpha>0$ soll normal heißen, wenn sie sowie jede Zahl zwischen 0 und $\alpha$ mit 1, $\omega$ oder einer Zahl der Form $\omega_\nu+1$ konfinal ist. Die Zahl 0 soll ebenfalls normal heißen.*

Zugleich mit $\alpha$ ist also jede kleinere Zahl normal. Es gelten nun folgende Sätze:

I. *Mit $\alpha$ ist $\alpha+1$ normal.*

II. *Wenn die Limeszahl $\lambda$ normal ist und ebenso jedes $\alpha_\eta$ für $\eta<\lambda$, dann ist auch $\alpha_\lambda=\lim\alpha_\eta$ normal.*

III. *Mit $\omega_\alpha$ ist $\omega_{\alpha+1}$ normal.*

IV. *Mit $\alpha$ ist $\omega_\alpha$ normal.*

Für den Beweis setzen wir fest:

$\alpha\succ\beta$ bedeutet: $\alpha$ konfinal mit $\beta$[4]), welche Bezeichnung wir auch fernerhin beibehalten. I ist trivial, II nahezu; denn wenn $\beta<\alpha_\lambda$, so gibt es ein $\alpha_\eta>\beta$, d. h. $\beta$ ist normal, und da $\alpha_\lambda\succ\lambda$, so ist $\alpha_\lambda$ normal. — Zu III: Alle Zahlen $<\omega_{\alpha+1}$, die $\neq0$, sind mit 1 oder den regulären Anfangszahlen $\leqq\omega_\alpha$ konfinal; nach Voraussetzung sind letztere gleich $\omega$ oder von der Form $\omega_\nu+1$. — IV beweist man am einfachsten so: Wäre $\omega_\alpha$ nicht normal, dann gäbe es eine kleinste Zahl $0<\beta\leqq\alpha$, so daß $\omega_\beta$ nicht normal wäre. Nach Voraussetzung wäre $\beta$ normal. Wenn $\beta=\beta'+1$, so wäre wegen III $\omega_{\beta'+1}$ normal, und wenn $\beta$ Limeszahl, so folgte die Normalität von $\omega_\beta$ aus II; wir hätten also einen Widerspruch. — Man kann übrigens auch so schließen: Jedenfalls ist $\omega_\omega$ normal, so daß wir die normale Zahl $\alpha>\omega$ annehmen dürfen. Wenn $\omega<\gamma<\omega_\alpha$, also $\omega_\eta\leqq\gamma<\omega_{\eta+1}$, $\eta+1\leqq\alpha$, dann ist entweder $\gamma\succ1$ oder $\gamma$ Limeszahl. Im zweiten Falle gilt $\gamma\succ\omega_\nu$, $\nu\leqq\eta$, wo $\omega_\nu$ regulär; $\nu$ ist keine Limeszahl, da sonst $\omega_\nu$ eine reguläre Anfangszahl mit Limeszahlindex wäre, also $\nu=\omega_\nu$, während $\nu<\alpha$ normal ist. Daher ist $\nu=0$ oder $\nu\succ1$. $\omega_\alpha$ selbst ist entweder gleich $\omega_{\alpha'+1}$ oder $\succ\alpha$.

---

[2]) § 15, Schluß.

[3]) Über konfinal siehe [1], Kap. IV, § 4 und Kap. V, § 6.

[4]) $\alpha\succ\beta$ soll nicht dasselbe bedeuten wie $\beta\prec\alpha$; mit letzterer Bezeichnung wäre sinngemäß die Beziehung $\alpha$ koinitial mit $\beta$ wiederzugeben. (Über koinitial siehe [1], Kap. IV, § 4.)

Die Sätze I—IV besagen, anschaulich ausgedrückt, daß man auf konstruktivem Wege aus dem Bereich der normalen Zahlen nicht herausgelangen kann.

Bilden wir nun die — vielleicht paradoxe — *wohlgeordnete Menge aller normalen Zahlen* und nennen wir $\Omega$ ihren Ordnungstypus, dann ist die Aussage, $\alpha$ sei normal, mit der Beziehung $\alpha < \Omega$ äquivalent. Die Feststellungen II und IV lassen sich so formulieren:

I'. *$\Omega$ ist regulär.*

II'. $\Omega = \omega_\Omega$.

Denn mit $\lambda < \Omega$, $\alpha_\eta < \Omega$ $(\eta < \lambda)$ ist $\alpha_\lambda < \Omega$, also nie $\Omega > \lambda$ für $\lambda < \Omega$, und wegen $\omega_\alpha < \Omega$ für $\alpha < \Omega$ ist $\omega_\Omega = \lim\limits_{\alpha < \Omega} \omega_\alpha \leqq \Omega \leqq \omega_\Omega$.

I' und II' zusammen besagen aber:

*$\Omega$ ist die kleinste reguläre Anfangszahl mit Limeszahl-Index.*

$\Omega$ ist also nicht paradox; denn die einzige Befürchtung, welche man vernünftigerweise gegen $\Omega$ hegen konnte, war, ob $\Omega$ nicht selbst wieder als normal angesehen werden müßte. — Diese Zahl ist wirklich von exorbitanter Größe, nämlich größer als jede — mit vor der Bildung von $\Omega$ bekannten Mitteln — „konstruierbare" Zahl.

Das Prinzip, welches zu $\Omega$ geführt hat, ist der Verallgemeinerung nach oben und nach unten fähig, d. h. es gestattet sowohl, beliebig viele Zahlen von exorbitanter Größe jenseits von $\Omega$ zu gewinnen als auch die Anfangszahlen Cantors rein *ordinal* zu charakterisieren. Zunächst wollen wir uns der letzteren Aufgabe zuwenden.

## § 2.

## Konfinalität.

Vom ordinalen Standpunkt aus bedeutet der Limes $\alpha_\lambda$ einer Menge von Zahlen

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\eta, \ldots\} \quad \text{mit} \quad \alpha_\eta < \alpha_\zeta \quad \text{für} \quad \eta < \zeta < \lambda,$$

wo $\lambda$ Limeszahl ist, den Ordnungstypus der wohlgeordneten Menge aller Zahlen, welche $\leqq$ einem $\alpha_\eta$ $(\eta < \lambda)$ sind; daß $\alpha_\lambda$ die kleinste Zahl ist, welche sämtliche $\alpha_\eta$ $(\eta < \lambda)$ übertrifft, folgt daraus sofort. — Daß es zu jeder Ordnungszahl $\alpha$ eine kleinste (reguläre) Zahl $\varrho$ gibt, so daß $\alpha > \varrho$, folgt unmittelbar aus dem Begriff der Wohlordnung. Wir können aber auch den folgenden bekannten Satz mit ordinalen Mitteln beweisen[5]):

*Jede Ordnungszahl $\alpha$ ist mit einer einzigen regulären Ordnungszahl $\varrho$ konfinal.*

Wir beweisen zu dem Zweck den allgemeineren Satz:

---

[5]) Von Hausdorff in [1], Kap. V, § 6 mittels Mächtigkeitsbetrachtungen bewiesen.

*Ist die geordnete Menge $A$ konfinal mit der regulären Limeszahl $\varrho$, so folgt aus $A \succ \sigma$ stets $\sigma \succ \varrho$, d. h. $\varrho$ ist die kleinste Zahl, mit der $A$ konfinal ist. (Der Fall $A \succ 1$ ist trivial.)*

Sei also $A \succ \varrho$, $A \succ \sigma$, $\varrho$ und $\sigma$ Limeszahlen (erstere zunächst beliebig, d. h. nicht notwendig regulär angenommen); das ist gleichbedeutend mit Beziehungen der Form

$$A \succ B = \{b_0, b_1, \ldots, b_\eta, \ldots\} \qquad (\eta < \varrho,\ B \leqq A),$$
$$A \succ C = \{c_0, c_1, \ldots, c_\zeta, \ldots\} \qquad (\xi < \sigma,\ C \leqq A),$$

wo $B$ und $C$ wohlgeordnete Teilmengen von $A$ vom Typus $\varrho$ und $\sigma$ sind; bezeichnen wir das Vorangehen eines Elementes $a \in A$ vor einem Element $a' \in A$ mit $a < a'$, dann soll also sein

$$b_0 < b_1 < \cdots < b_\eta < \cdots, \quad c_0 < c_1 < \cdots < c_\zeta < \cdots.$$

Zu jedem $b_\eta$ gibt es ein $c_\zeta$, so daß (in der geordneten Menge $A$) $b_\eta < c_\zeta$, und umgekehrt gibt es zu jedem $c_\zeta$ ein $b_\eta$ mit $c_\zeta < b_\eta$. Sei $b_{f(\zeta)}$ das erste Element aus $B$, welches $> c_\zeta$. Aus dem Komplex der Elemente

$$b_{f(0)} \leqq b_{f(1)} \leqq \ldots \leqq b_{f(\zeta)} \leqq \ldots \qquad (\zeta < \sigma)$$

entfernen wir alle diejenigen, welche einem vorangehenden gleich sind; dann bleibt eine wohlgeordnete Menge übrig

$$B' = \{b_{f(\zeta_0)}, b_{f(\zeta_1)}, \ldots, b_{f(\zeta_\nu)}, \ldots\} \qquad (b_{f(\zeta_\mu)} < b_{f(\zeta_\nu)} \text{ für } \mu < \nu),$$

wo $\xi_0 = 0$, $\nu < \lambda$ und $\lambda$ Limeszahl $\leqq \varrho, \sigma$. Offenbar gibt es zu jedem $c_\zeta$ ein $b_{f(\zeta_\nu)} > b_{f(\zeta)} > c_\zeta$, woraus erstens $A \succ B'$, also $B \succ B'$ und zweitens $\xi_\nu > \xi$, d. h. $\sigma = \lim\limits_{\nu < \lambda} \xi_\nu$ folgt. Das besagt aber, daß $\varrho \succ \lambda$, $\sigma \succ \lambda$, insbesondere für reguläres $\varrho$: $\lambda = \varrho$, $\sigma \succ \varrho$. Damit ist der Satz bewiesen.

## § 3.

## Reguläre Limeszahlen.

Die Ordnungszahl $\omega$ kann definiert werden als der Ordnungstypus der Menge aller Ordnungszahlen, die $\geqq 0$ und samt ihren von Null verschiedenen Vorgängern mit 1 konfinal sind. Diese Definition wollen wir verallgemeinern.

Sei $\alpha$ eine beliebige Ordnungszahl $\geqq \omega$. Die Menge aller regulären Zahlen $\leqq \alpha$ bezeichnen wir mit $R(\alpha)$. Sodann definieren wir analog wie in § 1:

*Eine Ordnungszahl $\xi > 0$ soll normal heißen, wenn sie sowie ihre Vorgänger $> 0$ mit Zahlen aus $R(\alpha)$ konfinal sind. Die 0 soll zu den normalen Zahlen rechnen.*

Mit $\xi$ ist wieder jede kleinere Zahl normal. Es gelten folgende Sätze:

I. *Mit $\xi$ ist $\xi + 1$ normal.*

II. *Mit $\lambda$ und allen $\beta_\eta$ $(\eta < \lambda)$ ist $\beta_\lambda = \lim \beta_\eta$ normal.*

III. *Mit $\xi$ ist $\xi\alpha$ normal.*

IV. *Mit $\xi$ ist $\alpha^\xi$ normal.*

I und II erledigen sich wie in § 1. — Zu III: Sei $\zeta = \xi\beta + \gamma$ $(\gamma < \xi)$. Falls $\gamma > 0$, ist $\zeta \succ \gamma$; falls $\gamma = 0$, ist $\zeta \succ \beta$ oder $\succ \xi$, je nachdem $\beta$ Limeszahl ist oder nicht. (Daraus folgt u. a., daß $\zeta^\iota \succ \zeta$ für jedes $\zeta > 0$). Ist also $\xi$ normal und $\zeta \leqq \xi\alpha$, daher $\zeta = \xi\beta + \gamma$ $(\beta \leqq \alpha,\ \gamma < \xi)$, so gilt $\zeta \succ \gamma$ oder $\zeta \succ \beta$ oder $\zeta \succ \xi$, d. h. $\xi\alpha$ ist stets normal. — Zu IV: Aus der vorhin bewiesenen Relation $\zeta^\iota \succ \zeta$ folgt $\zeta^3 = \zeta^\iota\zeta \succ \zeta$, wenn $\zeta$ keine Limeszahl, und diese Beziehung trifft erst recht zu, wenn $\zeta$ Limeszahl. Durch Induktion folgt allgemein $\zeta^n \succ \zeta$ $(1 \leqq n < \omega)$. — Nach III ist $\alpha^n$ $(1 \leqq n < \omega)$ normal; wir betrachten daher $\alpha^\xi$ mit $\xi \geqq \omega$. Falls $\xi$ Limeszahl, ist $\alpha^\xi \succ \xi$. Wenn $\xi = \lambda + n$, $\lambda$ Limeszahl, $1 \leqq n < \omega$, so ist $\alpha^\xi = \alpha^\lambda\alpha^n \succ \alpha^n \succ \alpha$ oder $\alpha^\xi = \alpha^\lambda\alpha^n \succ \alpha^\lambda \succ \lambda$, je nachdem $\alpha^n$, also $\alpha$ Limeszahl ist oder nicht. Daher ist stets $\alpha^\xi \succ \varrho \in R(\alpha)$, wenn $\xi$ normal. Sei jetzt $\alpha \leqq \zeta < \alpha^\xi$, also

$$\zeta = \alpha^{\beta_1}\gamma_1 + \cdots + \alpha^{\beta_n}\gamma_n + \gamma_{n+1},$$

wobei

$$\xi > \beta_1 > \cdots > \beta_n > 0 \quad \text{und} \quad \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1} < \alpha.$$

Wenn $\gamma_{n+1} > 0$, ist $\zeta \succ \gamma_{n+1}$; wenn $\gamma_{n+1} = 0$, $\gamma_i$ das letzte nicht verschwindende $\gamma$, so ist $\zeta \succ \alpha^{\beta_i}\gamma_i$, d. h. $\zeta \succ \gamma_i$ oder $\zeta \succ \alpha^{\beta_i}$; in allen Fällen gilt aber

$$\zeta \succ \varrho \in R(\alpha) \quad \text{für} \quad 0 < \zeta < \alpha^\xi.$$

Mithin ist $\alpha^\xi$ normal.

Einfacher kann man III und IV wie folgt beweisen. Mit $\xi$ und $\eta$ ist $\xi + \eta$ normal (Beweis vermöge I analog wie der erste Beweis von IV in § 1); also ist $\xi\nu + \xi = \xi(\nu + 1)$ normal mit $\xi\nu$ und $\xi$. Daraus schließt man wieder auf dieselbe Weise, daß $\xi\nu$ mit $\xi$ und $\nu$ normal ist, somit auch $\xi\alpha$. Also ist $\alpha^\xi\alpha = \alpha^{\xi+1}$ normal mit $\alpha^\xi$, und daraus folgt auf die nämliche Art, daß $\alpha^\xi$ mit $\xi$ normal ist.

Mit $\Lambda(\alpha)$ bezeichnen wir die Ordnungszahl der *wohlgeordneten Menge aller normalen Zahlen*. Die Aussage, $\xi$ sei normal, lautet dann: $\xi < \Lambda(\alpha)$; II und IV lassen sich so ausdrücken:

I'. *$\Lambda(\alpha)$ ist regulär.*

II'. $\Lambda(\alpha) = \alpha^{\Lambda(\alpha)}$.

I' rechtfertigt die Definition von $\Lambda(\alpha)$, denn I' besagt, *daß $\Lambda(\alpha)$* nicht mehr normal sondern *die erste reguläre Zahl oberhalb $\alpha$ ist.* II' bedeutet, *daß $\Lambda(\alpha)$ eine $\varepsilon$-Zahl ist.*

Die Operation $\Lambda(\alpha)$ benützen wir zu der Definition einer Normalfunktion[6]) $f(\xi) = \omega_\xi$:

1. $f(0) = \omega_0 = \omega$.
2. $f(\xi + 1) = \omega_{\xi+1} = \Lambda(\omega_\xi)$.
3. $f(\lambda) = \omega_\lambda = \lim \omega_\xi$ $(\xi < \lambda,\ \lambda$ Limeszahl).

Aus I' und II' folgt dann unmittelbar bzw. induktiv:

[6]) Über diesen Begriff siehe [1], Kap. V, § 3.

I″. *Alle* $\omega_{\xi+1}$ *sind reguläre Limeszahlen*[7]).

II″. *Alle* $\omega_\xi$ $(\xi > 0)$ *sind* $\varepsilon$*-Zahlen.*

In § 1 bedeuteten die Symbole $\omega_\nu$ zunächst die Cantorschen Anfangszahlen; die dortigen Betrachtungen ändern sich in nichts, wenn wir den $\omega_\nu$ die jetzige Bedeutung beilegen. Damit ist $\Omega$ auch ordinal hergeleitet. — Daß beide Bedeutungen der $\omega_\nu$ äquivalent sind, ergibt sich sofort aus dem Umstand, daß die Anfangszahlen Cantors von der Form $\omega_{\nu+1}$ regulär sind und jede reguläre Limeszahl eine Anfangszahl ist; die Reihe der regulären Zahlen ist aber eindeutig bestimmt. Wir wollen diese Äquivalenz nun auch direkt beweisen.

## § 4.

## Mächtigkeitsbeziehungen zwischen Ordnungszahlen.

**1.** Um den am Schluß des vorhergehenden § angekündigten Nachweis zu führen, bedürfen wir einiger Sätze über die multiplikativen Hauptzahlen oder $\delta$-Zahlen, wie sie von Hessenberg genannt wurden[8])[9])[10]). Eine multiplikative Hauptzahl $\sigma$ ist dadurch charakterisiert, daß $\beta\sigma = \sigma$ für $0 < \beta < \sigma$. Außer 2 gibt es nur transfinite Hauptzahlen, die $\delta$-Zahlen; man überzeugt sich mit geringer Mühe, daß sie, wie bekannt, die Form $\omega^{\omega^\nu}$ $(\nu \geqq 0)$ haben.

Der Kürze halber wollen wir mit $\alpha \sim \beta$ die Äquivalenz $W(\alpha) \sim W(\beta)$ der Mengen $W(\alpha)$ und $W(\beta)$ aller Ordnungszahlen unterhalb $\alpha$ resp. $\beta$ bezeichnen; $\alpha \sim \beta$ soll also dasselbe bedeuten wie die Gleichheit $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ der zu $\alpha$ und $\beta$ gehörigen Kardinalzahlen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$. — Wir haben zunächst den Satz:

I. $\sigma^2 \sim \sigma$ *für* $\sigma = \omega^{\omega^\nu}$ $(\nu \geqq 0)$.

Man kann ihn auf verschiedene Art beweisen, u. a. mittels des üblichen Diagonalverfahrens. Wir wollen folgenden Beweis bringen. Es gilt

$$\sigma = \sum_{\eta < \sigma} \eta^n \qquad (\sigma = \omega^{\omega^\nu},\ \nu \geqq 0;\ 1 \leqq n < \omega).$$

Denn aus $\eta < \sigma$ folgt $\eta^2 < \eta\sigma = \sigma$, ebenso $\eta\eta^2 < \eta\sigma = \sigma$, allgemein $\eta^n < \sigma$ für $\eta < \sigma$ $(1 \leqq n < \omega)$. Daher wird, wenn $\tau < \sigma$,

$$\sum_{\eta < \tau} \eta^n \leqq \tau^n \tau < \sigma,$$

---

[7]) Natürlich ist jede reguläre Limeszahl ein $\omega_\nu$. Denn zu jedem $\vartheta \geqq \omega$ gibt es ein $\nu$, so daß $\omega_\nu \leqq \vartheta < \omega_{\nu+1}$; wenn $\omega_\nu < \vartheta$, so ist $\vartheta >$ einer regulären Zahl $\leqq \omega_\nu < \vartheta$, also $\vartheta$ nicht regulär.

[8]) [3] Seite 578.

[9]) [4] § 4, 15) und § 9, 11).

[10]) Daß man mittels der $\delta$-Zahlen Mächtigkeitsbeziehungen zwischen Ordnungszahlen beweisen kann, hat G. Sudan in seiner Abhandlung „Sur les nombres delta" [6] gezeigt, wie aus einer Besprechung derselben durch A. Rosenthal in den Mathematical Reviews **10**, 4 (April 1949) zu entnehmen ist. Die nachstehenden Sätze sind ohne Kenntnis der Sudanschen Arbeit gefunden worden.

also

$$\sigma = \lim_{\tau < \sigma} \sum_{\eta < \tau} \eta^{\eta} = \sum_{\eta < \sigma} \eta^{\eta}.$$

Bilden wir nun alle möglichen geordneten und „indizierten" Paare $(\alpha, \beta)_\tau$, wo $\alpha, \beta < \tau$ und $0 < \tau < \sigma$, und ordnen wir sie nach der Vorschrift: $(\alpha, \beta)_\tau < (\alpha', \beta')_{\tau'}$, wenn $\tau < \tau'$ oder $\tau = \tau'$, $\alpha < \alpha'$ oder $\tau = \tau'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta < \beta'$, dann ist ihre Menge $M$ wohlgeordnet und hat den Ordnungstypus $\bar{M} = \sum_{\tau < \sigma} \tau^2 = \sigma$. Andererseits ist die Menge $N$ aller Paare $(\alpha, \beta)_\sigma$ äquivalent der echten Teilmenge $M'$ von $M$, die aus allen Paaren der Form besteht

$$(\alpha, \beta)_{\mu+1}, \quad \text{wo} \quad \mu = \max(\alpha, \beta) < \sigma.$$

Der Ordnungstypus $\bar{M}'$ von $M'$ ist offenbar $\geqq \sigma$; da aber $\bar{M}' \leqq \bar{M} = \sigma$, so ist $\bar{M}' = \sigma$. Also kommt $\bar{N} = \overline{\sigma^2} = \bar{M}' = \bar{\sigma}$. Hiermit ist I bewiesen.

Ferner brauchen wir den Satz:

II. $\alpha \sim \sigma$ *für* $\sigma \leqq \alpha \leqq \sigma^2$, $\sigma = \omega^{\omega^\nu}$.

Beweis. Wenn wir $\alpha < \sigma^2$ annehmen, so wird $\alpha = \sigma\xi + \eta$ mit $\xi < \sigma$, $\eta < \sigma$, daher

$$\alpha = \sigma\xi + \eta \sim \eta + \xi\sigma = \sigma.$$

**2.** Aus I und II kann man weitgehende Folgerungen ziehen, die wir im folgenden nicht benötigen, von denen wir aber wenigstens eine hervorheben wollen:

$$\alpha \sim \alpha^2 \quad \textit{für} \quad \alpha \geqq \omega.$$

Man hat zunächst aufgrund von I: $\sigma^3 = \sigma^2\sigma \sim \sigma\sigma \sim \sigma$, allgemein $\sigma^n \sim \sigma$ und wegen $\sigma^\omega = \sum_{n < \omega} \sigma^n$ auch $\sigma^\omega \sim \sigma\omega \sim \omega\sigma \sim \sigma$. Da nun für jedes $\alpha \geqq \omega$ ein $\nu$ existiert, so daß $\sigma = \omega^{\omega^\nu} \leqq \alpha < \omega^{\omega^{\nu+1}} = \sigma^\omega$, so wird

$$\alpha = \sigma^{n_1}\xi_1 + \cdots + \sigma^{n_k}\xi_k + \xi_{k+1},$$

wo

$$\xi_1, \ldots, \xi_{k+1} < \sigma \quad \text{und} \quad n_1 > \cdots > n_k > 0,$$

folglich $\alpha \sim \sigma(\xi_1 + \cdots + \xi_k) + \xi_{k+1} \sim \sigma$, daher wegen I auch $\alpha^2 \sim \sigma^2 \sim \sigma \sim \alpha$.

**3.** Endlich bedürfen wir noch des bekannten Satzes:

III. *Aus* $\gamma \sim \alpha$ *folgt* $\gamma \succ \varrho$, *wo* $\varrho$ *eine reguläre Zahl* $\leqq \alpha$.

Denn $\gamma \sim \alpha$ bedeutet, daß die Menge $W(\gamma)$ aller Zahlen $< \gamma$ in eine Wohlordnung vom Typus $\alpha$ gebracht werden kann

$$W(\gamma) = M = \{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\xi, \ldots\} \qquad (\xi < \alpha).$$

Streichen wir hierin alle $\beta_\eta$, die von einem vorangehenden $\beta_\xi$ übertroffen werden, so bleibt eine Menge wachsender Zahlen

$$N = \{\beta_{\eta_0}, \beta_{\eta_1}, \ldots, \beta_{\eta_\nu}, \ldots\} \qquad (\eta_0 = 0;\ \nu < \vartheta \leqq \alpha)$$

übrig. Es ist $W(\gamma) \succ N$, also $\gamma \succ \vartheta$. Denn falls $\gamma = \gamma' + 1$, ist $\gamma'$ die größte Zahl aus $M$ und daher das letzte Element in $N$; wenn aber

$\gamma$ Limeszahl, so gibt es zu jedem $\xi < \gamma$ ein $\beta_\eta \in M$ mit kleinstem Index $\eta$, welches $> \xi$; dieses $\beta_\eta$ muß aber zu $N$ gehören. Also wird in der Tat $\gamma \succ \vartheta$, woraus sofort III folgt.

## § 5.

## Die Zahlenklassen.

**1.** Um den zu Ende von § 3 versprochenen Nachweis zu erbringen, haben wir zunächst zu zeigen:

*Es ist* $\beta \sim \omega_\alpha$ *für* $\omega_\alpha \leqq \beta < \omega_{\alpha+1}$.

Wir beweisen es durch Induktion nach $\beta$. Sei

$$\omega_\alpha < \beta < \omega_{\alpha+1}, \quad \mu \sim \omega_\alpha \quad \text{für} \quad \omega_\alpha \leqq \mu < \beta \quad \text{(Induktionsvoraussetzung)}.$$

$\beta$ läßt sich darstellen in der Form

$$\beta = \omega_\alpha \gamma + \delta, \quad \delta < \omega_\alpha.$$

Wenn $\delta > 0$, so ist $\omega_\alpha \gamma < \beta$, also $\omega_\alpha \gamma \sim \omega_\alpha$, daher $\beta \sim \omega_\alpha + \delta \sim \omega_\alpha$ (nach § 4, II, da wegen § 3, II″ $\omega_\alpha$ eine multiplikative Hauptzahl). — Sei daher $\beta = \omega_\alpha \gamma$. Wenn $\gamma = \gamma' + 1$, so wird $\omega_\alpha \gamma = \omega_\alpha \gamma' + \omega_\alpha \sim \omega_\alpha + \omega_\alpha \sim \omega_\alpha$. Wenn aber $\gamma$ Limeszahl, so ist

$$\gamma = \lim \gamma_\eta \quad (\eta < \varrho,\ \varrho \text{ ein reguläres } \omega_\tau \leqq \omega_\alpha)\ ^{11}).$$

Wir können dabei $\gamma_\eta$ für $\eta \leqq \varrho$ als Normalfunktion annehmen mit $\gamma_0 = 0$, $\gamma_\varrho = \gamma$; dann wird

$$\gamma = \sum_{\eta < \varrho} \delta_\eta, \quad \text{wobei} \quad \delta_\eta = -\gamma_\eta + \gamma_{\eta+1},\ 0 < \delta_\eta < \gamma,$$

somit

$$\beta = \omega_\alpha \gamma = \sum_{\eta < \varrho} \omega_\alpha \delta_\eta \sim \omega_\alpha \varrho \sim \omega_\alpha.$$

**2.** Nun bleibt noch zu beweisen:

*Niemals wird* $\omega_\alpha \sim \omega_\beta$ *für* $\alpha < \beta$.

Daraus würde nämlich folgen (§ 4, III):

$$\omega_\beta \succ \varrho,\ \varrho \text{ reguläre Limeszahl} \leqq \omega_\alpha,$$

also $\varrho < \omega_\beta$. Nach § 3, I″ könnte nicht $\beta \succ 1$ sein, es wäre daher $\beta \succ \varrho$. Bezeichnen wir mit $W(\xi)$ die Menge aller Ordnungszahlen $< \xi$, so würde infolge $\omega_\alpha \sim \omega_\beta$ die Menge $W(\omega_{\alpha+1}) \subset W(\omega_\beta)$ abgebildet auf eine Menge $M \subset W(\omega_\alpha)$ vom Typus $\omega \leqq \mu \leqq \omega_\alpha$, d. h. es wäre

$$\omega_{\alpha+1} \sim \mu, \quad \omega_\nu \leqq \mu < \omega_{\nu+1} \leqq \omega_{\alpha+1};$$

da aber $\mu \sim \omega_\nu$, so würde $\omega_{\alpha+1} \sim \omega_\nu < \omega_{\alpha+1}$, daher $\omega_{\alpha+1} \succ \varrho'$, $\varrho' \leqq \omega_\nu$, d. h. $\omega_{\alpha+1}$ wäre nicht regulär.

Damit sind die in § 3 definierten $\omega_\nu$ mit den Anfangszahlen Cantors identifiziert.

---

[11]) Daß $\varrho \leqq \omega_u$, folgt aus der Definition von $\omega_{u+1}$ in § 3; bzgl. $\varrho = \omega_\tau$ vgl. Fußnote [7]).

## § 6.

## Weitere Zahlen von exorbitanter Größe.

**1.** Von $\Omega = \omega_\Omega$ (§ 1, II') aus kann man zu den Anfangszahlen $\omega_{\Omega+1}$, $\omega_{\Omega+2}$, ... weitergehen. Will man zu regulären Anfangszahlen mit Limeszahlindex oberhalb $\Omega$ gelangen, so verfährt man nach folgendem Prinzip: Wenn $\mathfrak{h}$ eine beliebige Ordnungszahl $\geqq \Omega$ ist, so bedeute wieder (vgl. § 3) $R(\mathfrak{h})$ die Menge aller regulären Zahlen $\leqq \mathfrak{h}$, und es heiße *normal* die Zahl 0 sowie jede Zahl $>0$, welche einschließlich ihrer nicht verschwindenden Vorgänger konfinal ist mit einer Zahl aus $R(\mathfrak{h})$ oder einer Zahl der Form $\omega_{\nu+1}$. Dann bestätigt man ohne weiteres, daß die Sätze I—IV in § 1 sich wörtlich übertragen. Bezeichnet man mit $A(\mathfrak{h})$ den Ordnungstypus der wohlgeordneten Menge aller normalen Zahlen, dann gilt:

$A(\mathfrak{h})$ *ist regulär.*

$A(\mathfrak{h}) = \omega_{A(\mathfrak{h})}$.

D. h.: $A(\mathfrak{h})$ *ist die erste reguläre Anfangszahl mit Limeszahlindex oberhalb* $\mathfrak{h}$. $A(\mathfrak{h})$ ist demnach nicht mehr normal.

Nun definiert man mittels der Operation $A(\mathfrak{h})$ wieder eine Normalfunktion $f(\nu) = \Omega^{(\nu)}$ (vgl. § 3) wie folgt:

1. $f(0) = \Omega^{(0)} = \Omega$.
2. $f(\nu+1) = \Omega^{(\nu+1)} = A(\Omega^{(\nu)})$.
3. $f(\lambda) = \Omega^{(\lambda)} = \lim \Omega^{(\nu)}$ $(\nu < \lambda,\ \lambda$ Limeszahl).

*Alle* $\Omega^{(\nu+1)}$ *sind reguläre Anfangszahlen mit Limeszahl-Index*[12]).

**2.** Jetzt erhebt sich die Frage nach den regulären Zahlen $\Omega^{(\nu)}$ mit Limeszahlindex $\nu$. Um sie zu beantworten, definieren wir als *normal* außer 0 diejenigen Zahlen, welche samt ihren nicht verschwindenden Vorgängern konfinal sind mit 1, $\omega$, $\Omega$ oder einer Zahl der Form $\omega_{\nu+1}$ oder $\Omega^{(\nu+1)}$. Man hat dann die Sätze:

I, II, III, IV: *siehe § 1.*

V. *Mit* $\Omega^{(\alpha)}$ *ist* $\Omega^{(\alpha+1)}$ *normal.*

VI. *Mit* $\alpha$ *ist* $\Omega^{(\alpha)}$ *normal.*

VI wird analog wie IV bewiesen (vgl. den ersten Beweis zu § 1, IV). Daß V zutrifft, sieht man sofort, wenn man bedenkt, daß alle Zahlen zwischen $\Omega^{(\alpha)}$ und $\Omega^{(\alpha+1)}$ konfinal sind mit Zahlen aus $R(\Omega^{(\alpha)})$ oder Zahlen der Form $\omega_{\nu+1}$ (vgl. Anm. [12])).

$\Omega^*$ sei der Ordnungstypus der wohlgeordneten Menge aller normalen Zahlen. II und VI lassen sich dann so aussprechen:

$\Omega^*$ *ist regulär.*

$\Omega^* = \Omega^{(\Omega^*)}$.

[12]) Umgekehrt sind alle regulären Anfangszahlen mit Limeszahl-Index in der Kategorie der Zahlen $\Omega^{(\nu)}$ enthalten. Denn für jedes $\gamma \geqq \Omega$ hat man ein $\nu$, so daß $\Omega^{(\nu)} \leqq \gamma < \Omega^{(\nu+1)}$, und wenn $\gamma > \Omega^{(\nu)}$, so ist $\gamma >$ einer Zahl aus $R(\Omega^{(\nu)})$ oder einer Zahl $\omega_{\xi+1}$, also kein reguläres $\omega_\lambda$ mit Limeszahl $\lambda$.

Daher ist $\Omega^*$ *die kleinste reguläre Zahl* $\Omega^{(\nu)}$ *mit Limeszahl-Index*, also nicht mehr normal.

**3.** Der Fortgang dieses Prozesses wird sich nach folgendem Programm vollziehen: $\mathfrak{K}$ sei eine wohlbestimmte *Kategorie*[13]) von regulären Ordnungszahlen, welcher 1 und $\omega$ angehören. Dann heiße $\alpha$ *normal (in bezug auf* $\mathfrak{K}$*)*, wenn $\alpha = 0$ oder wenn alle Zahlen $0 < \beta \leqq \alpha$ konfinal sind mit einer Zahl aus $\mathfrak{K}$. Ferner sei eine Normalfunktion $f(\nu)$ gegeben mit den Eigenschaften:

(a) $f(\nu + 1) \in \mathfrak{K}$ *für jedes* $\nu$, *aber* $f(\lambda) \bar{\in} \mathfrak{K}$, *falls* $\lambda$ *Limeszahl.*

(b) $f(0) = \mathfrak{h} \geqq \omega$ *ist normal.*

(c) *Mit* $f(\alpha)$ *ist* $f(\alpha + 1)$ *normal.*

Dann beweist man leicht die Sätze § 1, I, II sowie den zu § 1, IV analogen:

(d) *Mit* $\alpha$ *ist* $f(\alpha)$ *normal.*

Nennt man $A(\mathfrak{h})$ die Ordnungszahl der wohlgeordneten Menge aller (in bezug auf $\mathfrak{K}$) normalen Zahlen, so liefern (d) und § 1, II:

$A(\mathfrak{h})$ *ist regulär.*

$A(\mathfrak{h}) = f(A(\mathfrak{h}))$.

$A(\mathfrak{h})$ *ist* demnach nicht mehr normal in bezug auf $\mathfrak{K}$ sondern *die erste reguläre Zahl* $f(\nu)$ *mit Limeszahl* $\nu$. (Denn wenn $\lambda$ eine normale Limeszahl ist, so ist $f(\lambda)$ normal, und wäre $f(\lambda)$ regulär, so müßte $f(\lambda)$ zu $\mathfrak{K}$ gehören, im Widerspruch zu (a)).

Bei der Definition des Limes $A(\mathfrak{h})$ in Ziffer 1 dieses § bestand $\mathfrak{K}$ aus den Zahlen der Menge $R(\mathfrak{h})$ und den Zahlen der Form $\omega_{\nu+1}$, während die Normalfunktion $f(\nu)$ folgendermaßen bestimmt war:

$f(0) = \mathfrak{h}$ und, wenn $\omega_\Omega \leqq \omega_\gamma \leqq \mathfrak{h} < \omega_{\gamma+1}$:

$$f(\nu) = \omega_{\gamma+\nu} \qquad (\nu > 0).$$

Die Anwendung obiger Methode bei der Definition von $\Omega^*$ in Ziffer 2 liegt auf der Hand. Um $\Omega^{**}$ zu erhalten, nimmt man zu der Kategorie der Zahlen 1, $\omega$, $\Omega$, $\omega_{\nu+1}$, $\Omega^{(\nu+1)}$ noch die Zahl $\Omega^*$ hinzu und bekommt so die Kategorie $\mathfrak{K}$, in bezug auf welche jetzt die Normalität zu definieren ist. Die Normalfunktion $f(\nu)$ ist dabei gegeben durch

$$f(\nu) = \Omega^{(\Omega^* + \nu)},$$

wobei

$$f(0) = \Omega^{(\Omega^*)} = \Omega^*;$$

es wird

$$\Omega^{**} = A(\Omega^*) = \Omega^{(\Omega^* + \Omega^{**})} = \Omega^{(\Omega^{**})}.$$

Entsprechend erhält man $\Omega^{***}$ usw. usw.

---

[13]) Nicht *Menge*. Von den Kategorien (im Sinne einer formalen Klassifikation) aller Zahlen der Form $\nu + 1$ oder $\omega_{\nu+1}$ oder $\nu^3$ usw. kann man sprechen, aber nicht von den Mengen dieser Zahlen.

## Literaturverzeichnis.

F. Hausdorff.

[1] Grundzüge der Mengenlehre. 1. Aufl., Leipzig 1914.

F. Hausdorff.

[2] Mengenlehre. 2. Aufl., Berlin und Leipzig 1927.

G. Hessenberg.

[3] Grundbegriffe der Mengenlehre. Göttingen 1906.

E. Jacobsthal.

[4] Über den Aufbau der transfiniten Arithmetik. Math. Ann. **66**, S. 145—194 (1909).

E. Kamke.

[5] Über die Begründung der Mengenlehre. Math. Zeitschr. **39**, S. 112—125 (1934).

G. Sudan.

[6] Sur les nombres delta. Accad. Roum. Bull. Sect. Sci. **26**, 212—223 (1946).

(Eingegangen am 3. Oktober 1949.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 1, S. 70—75 (1950).

# Zur Axiomatik der ausgeglichenen Gewebe.

Von

**Fritz Klein-Barmen** in Wuppertal.

## § 1.

## Vorbemerkungen.

1. Eine bedeutsame Verallgemeinerung des *Verbandsbegriffes* stellt das *Gewebe* dar, das ich erstmalig vor etwa zehn Jahren untersucht habe[1]). Beim Gewebe sind die beiden Verbandsverknüpfungen außer Kraft gesetzt, während die Ordnungsbeziehung erhalten bleibt. In der vorliegenden Note nehme ich den Gegenstand erneut auf und befasse mich näher mit der Struktur gewisser *ausgeglichener* Gewebe, indem ich auf ein *längenendliches* Gewebe mehrere zusätzliche Axiome, insbesondere ein von der Theorie der Verbände her bekanntes *Nachbarschaftsaxiom* einwirken lasse.

2. Es sei $M$ ein Gewebe in bezug auf $\geq$, also auch in bezug auf $\leq$, unter $\leq$ die zu $\geq$ konverse Relation verstanden. Kleine lateinische Buchstaben sollen stets Elemente aus $M$ bedeuten. Zunächst einige Bezeichnungen:

Gilt $x \geq y$ und $x \neq y$, so werde $x > y$ geschrieben; dual: $x < y$.

Gilt $x \geq y$ oder $x \leq y$, so heiße $x$ *linear vergleichbar*[2]) mit $y$, in Zeichen: $x\, L_{\geq}\, y$; Negation: $x\, \bar{L}_{\geq}\, y$. Ist kein Mißverständnis zu befürchten, so werde kurz $x\, L\, y$ bzw. $x\, \bar{L}\, y$ geschrieben.

Sodann muß ich noch einmal auf den Begriff der Brücke und einiger damit zusammenhängender Begriffe eingehen, da es sich als wünschenswert herausgestellt hat, die Definitionen derselben in einigen Punkten abzuändern, in anderen auszubauen.

Eine endliche oder unendliche Folge $(x_0, x_1, \ldots)$ mit $x_0 L x_1 L \ldots$ heiße *Brücke*[3]). Unter einem *Pfeiler*[4]) derselben werde ein Glied $x_\mu$ ver-

[1]) Vgl. die im Literaturverzeichnis unter [H. 2] und [H. 3] aufgeführten Arbeiten. Die Kenntnis derselben wird vorausgesetzt. Vgl. ferner Köthe [2]. — Eine in anderer Richtung verlaufende Verallgemeinerung des Verbandsbegriffes führt zum *Holoid*; vgl. [H/S. 3].

[2]) Man sagt auch: $x$ ist linear *abhängig* von $y$.

[3]) Im Begriff der Folge liegt, daß ein und dasselbe Element wiederholt als Glied einer Brücke auftreten kann.

[4]) Abweichend von früheren Festsetzungen unterscheide ich jetzt zwischen Pfeiler und Glied.

standen derart, daß

$$x_{\mu-1} > x_\mu < x_{\mu+1} \quad \text{oder} \quad x_{\mu-1} < x_\mu > x_{\mu+1}$$

ist; je nachdem das erste oder zweite stattfindet, heiße $x_\mu$ ein *Tief-* oder *Hochpfeiler*. Eine Brücke, die genau einen Pfeiler hat, werde, je nachdem ein Tief- oder Hochpfeiler vorliegt, eine *Tief-* oder *Hochbrücke* genannt.

Als *alternierend* werde eine Brücke bezeichnet, bei der

$$x_0 > x_1 < x_2 > < \ldots \quad \text{oder} \quad x_0 < x_1 > x_2 < > \ldots$$

ist. Als *Kette*, und zwar als *absteigende* bzw. *aufsteigende*, werde eine Brücke bezeichnet, bei der

$$x_0 > x_1 > \ldots \quad \text{bzw.} \quad x_0 < x_1 < \ldots$$

ist.

Eine Brücke heiße *Hauptbrücke*, wenn je zwei aufeinanderfolgende Glieder $x_\mu$ und $x_{\mu+1}$ Nachbarn sind. Die um 1 verminderte Gliederanzahl einer aus endlich vielen Gliedern bestehenden Hauptbrücke werde als deren *Länge* bezeichnet.

3. Die beiden ersten *Zusatzaxiome* lauten[5]):

A. Zu je zwei Elementen $a, b$ gibt es mindestens ein $c$ mit

$$c \geq a, \quad c \geq b.$$

B. Es gibt ein $f$ derart, daß $f \geq a$ für alle $a$ ist[6]).

Man erkennt ohne Schwierigkeit:

Hilfssatz 1. *Ist M endlich, so sind* A *und* B *gleichwertig. Ist M unendlich, so gilt mit* B *zwar* A, *das Umgekehrte braucht aber nicht der Fall zu sein.*

4. Der verbandstheoretische Begriff der *Ausgeglichenheit* spaltet sich, wenn man zum Gewebe übergeht, in Ketten- und Brückenausgeglichenheit auf. Da diese beiden Begriffe weniger geläufig sind, weiterhin aber vielfach verwendet werden, wiederhole ich die Definition derselben[7]):

Ein längenendliches Gewebe werde als *kettenausgeglichen* (t-ausgeglichen) bezeichnet, wenn für alle $a, b$ mit $a\,L\,b$ gilt: Alle $a$ mit $b$ verbindenden Hauptketten haben dieselbe Länge.

Ein t-ausgeglichenes Gewebe werde als *brückenausgeglichen* (b-ausgeglichen) bezeichnet, wenn für alle $a, b$ gilt: Für alle $a$ mit $b$

[5]) Vgl. Axiom V in [H. 2], S. 111 und Axiome IV, V in [H. 3], S. 600.

[6]) Offenbar ist $f$ durch B eindeutig bestimmt.

[7]) Vgl. [H. 2], S. 121 und 122. Bei dieser Gelegenheit eine Berichtigung: In [H. 2] ist nicht zwischen Kette und Hauptkette unterschieden. Das hat verschiedentlich Inkorrektheiten zur Folge, so bei der Definition der Länge in Erkl. 11, S. 114 und bei Axiom VIII, S. 121.

verbindenden Brücken $(x_0, \ldots, x_m)$ hat

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} [x_\mu, x_{\mu+1}] \qquad (x_0 = a,\ x_m = b)$$

denselben Wert[8]).

Für später merken wir an:

Hilfssatz 2. *Ein* $\mathfrak{k}$*-ausgeglichenes Gewebe, das* A *genügt, ist* $\mathfrak{b}$*-ausgeglichen*[9]).

Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir uns dem eigentlichen Thema zu.

## § 2.

### Das Nachbarschaftsaxiom C.

1. Dasselbe hat konditionalen Charakter und lautet:

C. Für alle $a, b$ gilt: Wenn $a$ und $b$ einen gemeinsamen unteren Nachbarn haben, so haben sie auch einen gemeinsamen oberen Nachbarn.

Zu den C genügenden Geweben gehören die Birkhoff'schen Verbände[10]). Die Abb. 1—4 geben einige C genügende Gewebe wieder, die keine Verbände sind.

Fig. 1.

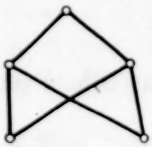

Fig. 2.

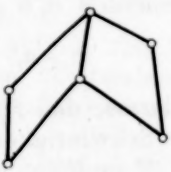

Fig. 3.

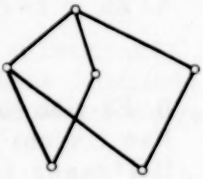

Fig. 4.

2. Weiterhin sei $M$ längenendlich. Ich beweise:

Satz 1. *Mit* C *gilt* A.

Beweis. Es genügt zu zeigen: Ist $a \bar{L} b$, so gibt es mindestens eine $a$ mit $b$ verbindende Hochbrücke. — Es sei

$$(1) \qquad (x_0, \ldots, x_m) \qquad (x_0 = a,\ x_m = b;\ m \geqq 2)$$

eine $a$ mit $b$ verbindende Hauptbrücke, überdies eine solche, die aus möglichst wenigen Gliedern besteht. Wegen $a \bar{L} b$ hat (1) mindestens einen Pfeiler; wegen der Minimalforderung tritt ein und dasselbe Element nicht wiederholt als Glied von (1) auf. Ist kein Tiefpfeiler vorhanden, so ist bereits (1) eine $a$ mit $b$ verbindende Hochbrücke. Des-

[8]) Statt „Brücken" kann man — formal weniger fordernd — auch „Hauptbrücken" oder „alternierende Brücken" setzen.

[9]) Vgl. [H. 2], S. 124, wo das duale Gegenstück bewiesen ist. Vgl. auch den in [Verb. 3], § 2 aufgestellten Brückensatz.

[10]) Vgl. [Verb. 7], S. 65.

halb darf angenommen werden, daß (1) mindestens einen Tiefpfeiler aufweist. Es sei $x_n$ ein solcher, so daß also

$$x_{n-1} > x_n < x_{n+1} \qquad (0 < n < m)$$

ist. Nach C gibt es ein $y_n$ derart, daß $y_n$ ein oberer Nachbar von $x_{n-1}$ und $x_{n+1}$ ist. Infolgedessen ist auch

$$(2) \qquad (x_0, \ldots, x_{n-1}, y_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$$

eine $a$ mit $b$ verbindende Hauptbrücke von minimaler Länge. Mit (2) verfahren wir ebenso wie mit (1), ersetzen also einen Tiefpfeiler derselben, sofern noch ein solcher vorhanden ist, durch ein Element, das ein oberer Nachbar der beiden oberen Nachbarn des Tiefpfeilers ist. Der damit eingeleitete Transformationsprozeß bricht ab, sobald kein Tiefpfeiler mehr vorhanden ist, und das tritt, wie man unschwer feststellt, nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein. Bezeichnen wir den einzigen Pfeiler der sich zuletzt ergebenden Brücke mit $c$, so ist $a < c > b$, womit alles bewiesen ist.

Zusatz 1. Ist

$$(z_0, \ldots, z_m) \qquad (z_0 = a,\ z_m = b)$$

eine der aus (1) durch Transformation hervorgegangenen Hauptbrücken, so ist

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} [x_\mu, x_{\mu+1}] = \sum_{\mu=0}^{m-1} [z_\mu, z_{\mu+1}].$$

Zusatz 2. Äquivalent mit C ist:

C'. Für alle $a$, $b$ mit $a \bar{L} b$ gilt: Unter den $a$ mit $b$ verbindenden Hauptbrücken minimaler Länge gibt es auch eine Hochbrücke.

3. Die beiden Zusätze geben Veranlassung, ein längenendliches, dem Axiom C unterworfenes Gewebe auf Ausgeglichenheit hin zu untersuchen. In dieser Hinsicht gilt:

Satz 2. C *ohne* B *ist nicht hinreichend dafür, daß M* t*-ausgeglichen ist;* C *et* B *ist hinreichend dafür, daß M* b*-ausgeglichen ist.*

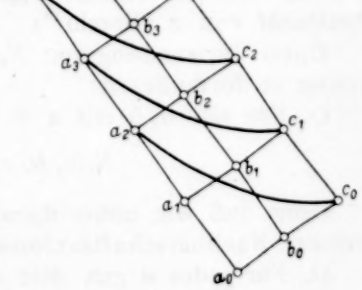

Fig. 5.

Beweis. 1) Man denke sich Abb. 5 in Richtung des Pfeiles ad infinitum fortgesetzt. Das dadurch repräsentierte Gewebe genügt C, aber nicht B. Da die beiden gleichendigen Hauptketten

$$(a_{\mu+2}, a_{\mu+1}, a_\mu), \quad (a_{\mu+2}, c_\mu, b_\mu, a_\mu)$$

verschiedene Länge haben, ist das Gewebe nicht t-ausgeglichen.

2) Nach Satz 1 und Hilfssatz 2 reicht es aus nachzuweisen, daß $M$ t-ausgeglichen ist. Ich zeige zunächst, daß für jedes $a$ gilt: Hat eine der $f$ mit $a$ verbindenden Hauptketten die Länge $m$, so haben alle $f$ mit $a$ verbindenden Hauptketten die Länge $m$. — Die Behauptung trifft für $m = 0$ trivialerweise zu und für $m = 1$, weil es in diesem Fall nur eine $f$ mit $a$ verbindende Hauptkette gibt. Ist die Behauptung aber für alle $\mu$ mit $\mu < m$ richtig ($m > 1$), so ergibt sich folgendermaßen, daß sie auch für $\mu = m$ richtig ist. Es seien

$$(x_0, \ldots, x_m), \ (y_0, \ldots, y_n) \quad (x_0 = y_0 = f, \ x_m = y_n = a)$$

zwei $f$ mit $a$ verbindende Hauptketten. Ersichtlich ist $n \geqq m$. Entweder ist

$$x_{m-1} = y_{n-1} \quad \text{oder} \quad x_{m-1} \neq y_{n-1}.$$

Im ersten Fall ist $m - 1 = n - 1$, also $m = n$. Im zweiten Fall gibt es nach C ein $z$, das ein oberer Nachbar von $x_{m-1}$ und $y_{n-1}$ ist. Dann haben die $f$ mit $z$ verbindenden Hauptketten die Länge $m - 2$, weil die $f$ mit $x_{m-1}$ verbindenden Hauptketten, zu denen auch die über $z$ führenden gehören, die Länge $m - 1$ haben. Also ist auch jetzt $m = n$.

Sind nun $a$ und $b$ zwei Elemente mit $a \geq b$, so haben die $f$ mit $a$ verbindenden Hauptketten gleiche Länge, ebenso die $f$ mit $b$, also auch die $a$ mit $b$ verbindenden Hauptketten.

Zusatz. Ist $M$ endlich, so ist C hinreichend dafür, daß $M$ b-ausgeglichen ist.

Das folgt sofort nach Satz 1 und Hilfssatz 1.

4. Um C in eine weitere äquivalente Aussage umzuformen, führen wir zwei dual sich entsprechende Funktionen $N_t$ und $N_b$ ein: Sind $x_1, \ldots, x_m$ alle verschieden ($m \geqq 1$), so gebe $N_t(x_1, \ldots, x_m)$ bzw. $N_b(x_1, \ldots, x_m)$ die Anzahl der Elemente von $M$ an, deren jedes ein gemeinsamer *unterer* bzw. gemeinsamer *oberer* Nachbar von allen $x_\mu$ ist. Für längenendliche Gewebe stimmt $N_t(x)$ mit der unteren, $N_b(x)$ mit der oberen *Spaltzahl* von $x$ überein [11]).

Unter Verwendung von $N_t$ und $N_b$ läßt sich unser Nachbarschaftsaxiom so formulieren:

C. Für alle $a, b$ mit $a \neq b$ gilt: Mit

$$N_t(a, b) > 0 \quad \text{ist} \quad N_b(a, b) > 0.$$

Ohne daß wir näher darauf eingehen wollen, mögen noch einige weitere Nachbarschaftsaxiome angegeben werden:

D. Für jedes $a$ gilt: Mit $N_t(a) > 0$ ist $N_b(a) > 0$.

E. Für alle $a, b$ mit $a \neq b$ ist $N_t(a, b) \leqq 1$.

F. Für alle $a, b, c$ mit $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$ gilt:

$$\text{Mit } N_t(a, b, c) > 0 \quad \text{ist} \quad N_b(a, b, c) = 0.$$

[11]) Vgl. [H. 2], S. 116.

Dazu werde nur bemerkt: Ist D in Kraft und gibt es ein $a$ mit $N_t(a) > 0$, so ist $M$ oben offen, d. h. B ist nicht in Kraft. E ist erfüllt, wenn $M$ ein Verband ist. F ist erfüllt, wenn $M$ ein distributiver Verband ist.

## Literaturverzeichnis.

F. Klein-Barmen.

[Verb. 3] Über ausgeglichene Verbände. Math. Ann. **112** (1936), S. 411—418.

[Verb. 7] Birkhoffsche und harmonische Verbände. Math. Zeitschr. **42** (1936), S. 58—81.

[H. 2] Theorie der Gewebe. Ebenda **45** (1939), S. 107—126.

[H. 3] Zur Theorie der Gefüge und Vereine. Ebenda **45** (1939), S. 595—606.

[H/S. 3] Ein Beitrag zur Theorie der linearen Holoide. Ebenda **51** (1948), S. 355—366.

G. Köthe.

[2] Verbände. Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939—1946, Bd. 1, I, S. 81—95.

(Eingegangen am 31. Oktober 1949.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 1, S. 76—83 (1950).

# Zur Darstellung einiger Klassen hypergeometrischer Polynome durch Integrale vom Dirichlet-Mehlerschen Typus.

Von

**Alexander Dinghas** in Berlin.

## § 1.

## Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit soll für eine Klasse hypergeometrischer Polynome, besonders für diejenigen, welche durch die Ausdrücke $(1-2hx+h^2)^{-\alpha}$ bzw. $(1-2hx-2h'y+h^2+h'^2)^{-\alpha}$ erzeugt werden, Darstellungen mit Hilfe von Integralen vom DIRICHLET-MEHLER'schen Typus gegeben werden. Als solche Darstellung bezeichnen wir jedes Integral von der Form

$$\int_{\vartheta}^{\pi} f_n(\varphi)\,(\cos\vartheta-\cos\varphi)^{-\alpha}\,d\varphi \qquad (0<\alpha<1)$$

wobei $f_n(\varphi)$ eine bestimmte, vom Grad des Polynoms abhängige Funktion von $\varphi$ ist, die noch gewissen Periodizitätsbedingungen genügt Ein typisches Beispiel einer solchen Darstellung hat man in dem klassischen Ausdruck der LEGENDRE'schen Polynome durch die Gleichung

$$P_n(\cos\vartheta)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\varphi}}\,d\varphi. \tag{1.1}$$

Diese wird hier zunächst auf die sogenannten GEGENBAUER'schen Polynome $C_n^{\alpha}(\cos\vartheta)$ übertragen. Darüber hinaus liefert die hier angewandte Methode einige neue Ausdrücke sowohl für $P_n(\cos\vartheta)$ als auch für $P_n(\cos 2\vartheta)$ und $P_n(\cos 3\vartheta)$. Als die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit müssen die Formeln (2. 4), (2. 6), (3. 3), (3. 5), (4. 7) und (5. 1) angesehen werden. Auch die Darstellung von $C_n^{\alpha}(\cos 3\vartheta)$ bzw. $P_n(\cos 3\vartheta)$ durch ein Doppelintegral verdient besonderes Interesse und weist bei Einbeziehung weiterer Dimensionen auf Verallgemeinerungen hin, die hier nur angedeutet werden können.

Den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildete ein einfaches Verfahren, dessen sich HERMITE[1]) zum Beweis der DIRICHLET-MEHLER'schen Formel (1.1)

[1]) Vgl. z. B. Correspondence d'Hermite et de Stieltjes, Paris, Gauthier-Villars, 1905 Bd. II S. 43. Es handelt sich hier um den Fall $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$.

bediente. Hier wird gezeigt, wie fruchtbar dieses HERMITE'sche Verfahren ist, und wie man dadurch eine Reihe von Formeln auf einfache und einheitliche Weise gewinnen kann.

## § 2.

## Eine allgemeine Integralformel.

Es bezeichne $P(x) = Ax + B$ ein lineares Polynom in $x$, das im Intervall

$$a \leqq x \leqq b \tag{2.1}$$

stets $> 0$ bleibt. Sind dann $\alpha$, $\beta$ zwei reelle positive Zahlen und rechnet man das Integral

$$\int_a^b \frac{(b-x)^{\alpha-1}(x-a)^{\beta-1}}{P^{\alpha+\beta}(x)}\, dx \tag{2.2}$$

mit Hilfe der Substitution

$$x = \frac{a + bu}{1 + u} \tag{2.3}$$

aus, so erhält man nach einigen leichten Rechnungen

$$\frac{1}{P^{\alpha}(a)\, P^{\beta}(b)} = \frac{(b-a)^{1-\alpha-\beta}}{B(\alpha,\beta)} \int_a^b \frac{(b-x)^{\alpha-1}(x-a)^{\beta-1}}{P^{\alpha+\beta}(x)}\, dx, \tag{2.4}$$

wobei wie üblich $B(\alpha, \beta)$ das EULER'sche Integral erster Gattung bedeutet.

Diese wichtige Relation bildet den Kernpunkt der vorliegenden Arbeit und gestattet mannigfache Anwendungen auf die Theorie der Darstellung bestimmter Polynome durch trigonometrische Integrale. Man setze in der Tat zunächst $b = -a = x > 0$ und ersetze zugleich die Integrationsveränderliche durch $xt$. Man erhält dann für $\alpha = \beta > 0$ die Formel

$$\frac{1}{\{P(x)\, P(-x)\}^{\alpha}} = \frac{2^{1-2\alpha}}{B(\alpha,\alpha)} \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{\alpha-1}}{P^{2\alpha}(xt)}\, dt. \tag{2.5}$$

Diese Formel läßt sich auch so schreiben

$$\frac{1}{\{P(x)\, P(-x)\}^{\alpha}} = \frac{2^{1-2\alpha}}{B(\alpha,\alpha)} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2\alpha-1}\varphi}{P^{2\alpha}(x\cos\varphi)}\, d\varphi. \tag{2.6}$$

Wir machen nun zusätzlich die Annahme, daß die Koeffizienten von $P(x)$ von einem Parameter $h$ abhängen und zwar so, daß für $0 \leqq h \leqq h_0$, $P(x) > 0$ bleibt. Dann kann man aus (2.6) folgenden Satz ablesen:

*Es sei allgemein in der Umgebung von* $h = 0$

$$\frac{1}{(Ax+B)^{\varkappa}} = \sum_0^{\infty} A_n^{\varkappa}(x)\, h^n$$

*gesetzt. Dann gilt*

$$B_n^{\alpha}(x) = \frac{2^{1-2\alpha}}{B(\alpha,\alpha)} \int_0^{\pi} A_{2n}^{2\alpha}(x\cos\varphi)\sin^{2\alpha-1}\varphi\, d\varphi. \tag{2.7}$$

Dabei ist

$$B_n^{\alpha}(x^2) = \sum_0^n A_{n-k}^{\alpha}(x)\, A_k^{\alpha}(-x).$$

## § 3.

### Anwendungen auf die Polynome von Gegenbauer und Legendre.

Man definiere wie üblich die GEGENBAUER'schen Polynome $C_n^{\nu}(x)$ $(\nu \neq 0)$ durch die Entwicklung

$$(1-2hx+h^2)^{-\nu} = \sum_0^{\infty} C_n^{\nu}(x)\, h^n, \tag{3.1}$$

und nehme $P(x)$ gleich $1-2hx+h^2$.

Dann erhält man aus (2.6)

$$\frac{1}{(1-2h^2(2x^2-1)+h^4)^{\alpha}} = \frac{2^{1-2\alpha}}{B(\alpha,\alpha)} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2\alpha-1}\varphi\, d\varphi}{(1-2hx\cos\varphi+h^2)^{2\alpha}},$$

und infolgedessen wird, da allgemein $C_{2n}^{\alpha}(x)$ ein gerades Polynom ist[2])

$$C_n^{\alpha}(2x^2-1) = \frac{4^{1-\alpha}}{B(\alpha,\alpha)} \int_0^{\pi/2} C_{2n}^{2\alpha}(x\cos\varphi)\sin^{2\alpha-1}\varphi\, d\varphi. \tag{3.2}$$

Diese Formel läßt sich auch so schreiben

$$C_n^{\alpha}(\cos 2\vartheta) = \frac{4^{1-\alpha}}{B(\alpha,\alpha)} \int_0^{\pi/2} C_{2n}^{2\alpha}(\cos\vartheta\cos\varphi)\sin^{2\alpha-1}\varphi\, d\varphi \tag{3.3}$$

mit $x = \cos\vartheta$, $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$.

Ist nun $\alpha = 1$, so gilt bekanntlich

$$C_n^{1}(x) = \frac{\sin\{(n+1)\arccos x\}}{\sin(\arccos x)} \tag{3.4}$$

und die rechte Seite ist gleich dem sogenannten TSCHEBYTSCHEFF'schen Polynom zweiter Art $U_n^{*}(x)$.

Wir erhalten also für die LEGENDRE'schen Polynome die Darstellung

$$P_n(\cos\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U_{2n}^{*}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi, \tag{3.5}$$

mit $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$.

[2]) Vgl. z. B. W. MAGNUS-F. OBERHETTINGER, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik, Berlin, Springer-Verlag 1949, S. 79.

Aus der Gleichung (2. 5) ergibt sich ohne weiteres auch eine DIRICHLET-MEHLER'sche Darstellung für die Polynome $C_n^\alpha(x)$. Schreibt man nämlich (2. 5) in der Form

$$\frac{1}{\{P(x)\,P(-x)\}^\alpha} = \frac{(2x)^{1-2\alpha}}{B(\alpha,\alpha)} \int_{-x}^{x} \frac{(x^2-t^2)^{\alpha-1}}{P^{-\alpha}(t)}\,dt,$$

so wird mit $x = \cos\vartheta$, $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{(1-2h^2\cos 2\vartheta + h^4)^\alpha} = \frac{(2\cos\vartheta)^{1-2\alpha}}{B(\alpha,\alpha)} \int_{\vartheta}^{\pi-\vartheta} \frac{(\cos^2\vartheta - \cos^2\varphi)^{\alpha-1}}{(1-2h\cos\varphi + h^2)^{2\alpha}} \sin\varphi\,d\varphi.$$

Ersetzt man hier $2\vartheta$ durch $\vartheta$ und $2\varphi$ durch $\varphi$, so erhält man leicht

$$\frac{1}{(1-2h^2\cos\vartheta + h^4)^\alpha} = \frac{\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{1-2\alpha}}{2^{3\alpha-1}\,B(\alpha,\alpha)} \int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta} \frac{(\cos\vartheta - \cos\varphi)^{\alpha-1}\sin\frac{\varphi}{2}}{\left(1-2h\cos\frac{\varphi}{2}+h^2\right)^{2\alpha}}\,d\varphi.$$

Daraus folgt, da allgemein $C_{2n}^\alpha(x)$ ein gerades Polynom von $x$ ist,

$$(3.\,6)\quad C_n^\alpha(\cos\vartheta) = \frac{\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{1-2\alpha}}{2^{3\alpha-2}\,B(\alpha,\alpha)} \int_{\vartheta}^{\pi} (\cos\vartheta - \cos\varphi)^{\alpha-1}\,C_{2n}^{2\alpha}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Ist speziell $\alpha = \frac{1}{2}$, so wird wegen (3. 4)

$$(3.\,7)\qquad P_n(\cos\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\varphi}}\,d\varphi.$$

Eine weitere Anwendung von (2. 4) für dasselbe $P(x)$ erhält man, wenn man dort $b = 1$ setzt und $a = x \leqq 1$ nimmt. Es wird

$$\frac{1}{P^\alpha(x)} = \frac{(1-h)^{2\beta}(1-x)^{1-\alpha-\beta}}{B(\alpha,\beta)} \int_{x}^{1} \frac{(1-t)^{\alpha-1}(t-x)^{\beta-1}}{P^{\alpha+\beta}(t)}\,dt.$$

Für $\beta = \frac{1}{2}$ erhält man

$$(3.\,8)\qquad \frac{1}{P^\alpha(x)} = \frac{(1-h)(1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{B\left(\alpha,\frac{1}{2}\right)} \int_{x}^{1} \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{\sqrt{t-x}\;P^{\alpha+\frac{1}{2}}(t)}\,dt,$$

und durch Vergleich der $h$-Potenzen

$$(3.\,9)\qquad C_n^\alpha(x) = \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{B\left(\alpha,\frac{1}{2}\right)} \int_{x}^{1} \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{\sqrt{t-x}} \left\{C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}(t) - C_{n-1}^{\alpha+\frac{1}{2}}(t)\right\} dt.$$

Eine Art Umkehrung dieser Formel erhält man wieder aus (3. 8) durch Multiplikation mit $1+h$ unter Beachtung der Entwicklung

$$(2\alpha-1)\,\frac{1-h^2}{P^{\alpha+\frac{1}{2}}(x)} = \sum_0^\infty (2k+2\alpha-1)\,C_k^{\alpha-\frac{1}{2}}(x)\,h^k.$$

Es wird dann

$$(3.10)\quad C_n^{\alpha}(x)+C_{n-1}^{\alpha}(x)=\frac{(2n+2\alpha-1)(1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{B(\alpha,\frac{1}{2})(2\alpha-1)}\int_x^1\frac{(1-t)^{\alpha-1}C_n^{\alpha-\frac{1}{2}}(t)}{\sqrt{t-x}}\,dt.$$

Schließlich erhält man eine letzte Anwendung von (2.4) für dieselbe Form von $P(x)$, wenn man $a$, $b$ aus dem Intervall $-1\leqq x\leqq 1$ nimmt und $a=\cos\vartheta$, $b=\cos\vartheta'$ setzt und $\alpha$, $\alpha'$ anstelle von $\alpha$, $\beta$ schreibt.

Man erhält dann

$$\frac{1}{\Delta^{\alpha}(\cos\vartheta)\,\Delta^{\alpha'}(\cos\vartheta')}$$

$$=\frac{(\cos\vartheta'-\cos\vartheta)^{1-\alpha-\alpha'}}{B(\alpha,\alpha')}\int_{\vartheta'}^{\vartheta}\frac{(\cos\vartheta'-\cos\varphi)^{\alpha-1}(\cos\varphi-\cos\vartheta)^{\alpha'-1}}{P^{\alpha+\alpha'}(\cos\varphi)}\sin\varphi\,d\varphi,$$

und durch Vergleich der $h$-Potenzen

$$\sum_0^n C_{n-k}^{\alpha}(\cos\vartheta)\,C_k^{\alpha'}(\cos\vartheta')=\frac{(\cos\vartheta'-\cos\vartheta)^{1-\alpha-\alpha'}}{B(\alpha,\alpha')}\cdot$$

$$\cdot\int_{\vartheta'}^{\vartheta}\{\cos\vartheta'-\cos\varphi\}^{\alpha-1}\{\cos\varphi-\cos\vartheta\}^{\alpha'-1}C_n^{\alpha+\alpha'}(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

Insbesondere gilt für $0<\alpha<1$

$$\sum_0^n C_{n-k}^{\alpha}(\cos\vartheta)\,C_k^{-\alpha}(\cos\vartheta')=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\cdot$$

$$\cdot\int_{\vartheta'}^{\vartheta}\{\cos\vartheta'-\cos\varphi\}^{\alpha-1}\{\cos\varphi-\cos\vartheta\}^{-\alpha}\sin(n+1)\varphi\,d\varphi.$$

## § 4.

## Mehrfache Dirichlet-Mehlersche Integrale.

Wir betrachten zunächst in der $xy$-Ebene ein Dreieck $D$ mit den Ecken $P(a,b)$, $P'(a',b')$, $P''(a'',b'')$ und setzen voraus, daß

$$(4.1)\qquad E=\begin{vmatrix}1&a&b\\1&a'&b'\\1&a''&b''\end{vmatrix}>0$$

ist.

Wir setzen für einen Punkt $Q(x,y)$

$$(4.2)\quad T=\begin{vmatrix}1&x&y\\1&a'&b'\\1&a''&b''\end{vmatrix},\quad T'=\begin{vmatrix}1&a&b\\1&x&y\\1&a''&b''\end{vmatrix},\quad T''=\begin{vmatrix}1&a&b\\1&a'&b'\\1&x&y\end{vmatrix}$$

und betrachten das Doppelintegral

$$J = \int_D \frac{T^{\alpha-1} T'^{\alpha'-1} T''^{\alpha''-1}}{\Pi^{\alpha+\alpha'+\alpha''}(x, y)} \, dx \, dy \qquad (\alpha > 0,\ \alpha' > 0,\ \alpha'' > 0) \tag{4.3}$$

erstreckt über das Dreieck $D$. $\Pi(x, y)$ ist hier ein beliebiger linearer Ausdruck $Ax + By + C$, der in $D$ positiv bleibt.

Man führe nun das Dreieck durch die Substitution

$$x = \frac{a + a'u + a''v}{1 + u + v}, \quad y = \frac{b + b'u + b''v}{1 + u + v} \tag{4.4}$$

in das Gebiet $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ der $uv$-Ebene über und beachte, daß bei dieser Transformation die Größen[3]) $T$, $T'$, $T''$ und $\Pi(x, y)$ durch die Gleichungen

$$T = \frac{E}{1 + u + v}, \quad T' = \frac{uE}{1 + u + v}, \quad T'' = \frac{vE}{1 + u + v} \tag{4.5}$$

und

$$(1 + u + v)\,\Pi(x, y) = \Pi(a, b) + u\,\Pi(a', b') + v\,\Pi(a'', b'') \tag{4.6}$$

gegeben werden.

Da

$$dx\,dy = \frac{E}{(1 + u + v)^3} \, du\,dv$$

ist, so wird nach einfachen Rechnungen

$$\frac{1}{\Pi^{\alpha}(a, b)\,\Pi^{\alpha'}(a', b')\,\Pi^{\alpha''}(a'', b'')} = \frac{\Gamma(\alpha + \alpha' + \alpha'')}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha')\,\Gamma(\alpha'')} \, J \cdot E^{2-\alpha-\alpha'-\alpha''} \tag{4.7}$$

mit

$$J = \int_D \frac{T^{\alpha-1} T'^{\alpha'-1} T''^{\alpha''-1}}{\Pi^{\alpha+\alpha'+\alpha''}(x, y)} \, dx\,dy. \tag{4.8}$$

Diese Integralbeziehung, deren rechte Seite wir als einen mehrfachen Mehler'schen Ausdruck bezeichnen werden, liefert jetzt eine Reihe von allgemeinen Formeln, die dem einfachen Mehler'schen Integral durchaus entsprechen. Man nehme nämlich zunächst allgemein an, daß die Koeffizienten $A$, $B$, $C$ des linearen Polynoms $\Pi$ in analytischer Weise von zwei Parametern $h$, $h'$ abhängen und daß allgemein $1 : \Pi^s(x, y)$ in der Umgebung von $h = h' = 0$ in eine Doppelreihe entwickelbar ist, etwa

$$\sum_{m,\,n=0}^{\infty} P^s_{mn}(x, y)\, h^m \cdot h'^n.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} &\sum P_{\mu\nu}(a, b)\ P_{\mu'\nu'}(a', b')\ P_{\mu''\nu''}(a'', b'') \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \alpha' + \alpha'')}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha')\,\Gamma(\alpha'')} E^{2-\alpha-\alpha'-\alpha''} \int_D T^{\alpha-1} T'^{\alpha'-1} T''^{\alpha''-1} P^{\alpha+\alpha'+\alpha''}_{m,n}(x, y)\, dx\,dy, \end{aligned} \tag{4.9}$$

[3]) $T$, $T'$, $T''$ stellen die doppelten bei der gewählten Anordnung positiven Flächeninhalte der Dreiecke $QP''P$, $QP'P''$, $QPP'$ dar.

wobei links die Summation über alle ganzen, nicht negativen $\mu, \mu', \mu''$, $\nu, \nu', \nu''$ zu erstrecken ist, mit $\mu + \mu' + \mu'' = m$, $\nu + \nu' + \nu'' = n$. Einen wichtigen Spezialfall dieser allgemeinen Formel bildet die zuerst von HERMITE[4]) betrachtete Polynomfolge $V_{m,n}(x, y)$, die durch folgende Entwicklung charakterisiert wird

$$(4.\ 10) \qquad (1 - 2xh - 2yh' + h^2 + h'^2)^{-1} = \sum_{m,n} V_{m,n}(x, y)\, h^m h'^n.$$

Betrachtet man allgemein die durch die Entwicklung

$$(4.\ 11) \qquad (1 - 2xh - 2yh' + h^2 + h'^2)^{-s} = \sum_{m,n} V^s_{m,n}(x, y)\, h^m h'^n$$

definierten Polynome ($s \neq 0$!), so gilt

$$(4.\ 12) \quad \begin{aligned} &\sum V^{\alpha}_{\mu\nu}(a, b)\ V^{\alpha'}_{\mu'\nu'}(a', b')\ V^{\alpha''}_{\mu''\nu''}(a'', b'') \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \alpha' + \alpha'')}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha')\,\Gamma(\alpha'')}\, E^{2\cdot\alpha-\alpha'-\alpha''} \int_D T^{\alpha-1} T'^{\,\alpha'-1} T''^{\alpha''-1}\, V^{\alpha+\alpha'+\alpha''}_{m,n}(x, y)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Von dieser allgemeinen Formel werden wir im folgenden keine weitere Anwendung geben, sondern nur den Fall betrachten, wo in (4. 7) der Ausdruck $\Pi(x, y)$ lediglich von einem Parameter $h$ abhängt und gleich $(1 - 2hx + h^2)^{-\alpha}$ ist.

## § 5.

## Ein Ausdruck für $C^{\alpha}_{n}(\cos 3\vartheta)$.

Man betrachte in der $xy$-Ebene ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle_\vartheta$ mit den Ecken $A(e^{i\vartheta})$, $B\left(e^{i\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right)}\right)$, $C\left(e^{i\left(\vartheta + \frac{4\pi}{3}\right)}\right)$ $\left(0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ und wende auf $\Pi = (1 - 2hx + h^2)^{-\alpha}$ mit $\alpha = \alpha' = \alpha''$ die Betrachtungen von § 4 an.

Es wird dann nach (4. 7)

$$\frac{1}{(1 - 2h^3\cos 3\vartheta + h^6)^{\alpha}} = \frac{\Gamma(3\alpha)}{\Gamma^3(\alpha)} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{2-3\alpha} \int_{\triangle_\vartheta} \frac{(T\,T'\,T'')^{\alpha-1}}{(1 - 2xh + h^2)^{3\alpha}}\, dx\, dy.$$

Nun bewirkt die Transformation $z' = z\, e^{-i\vartheta}$ den Übergang vom Dreieck $\triangle_\vartheta$ zum Dreieck $\triangle_0$ und es ist leicht zu sehen, daß der Ausdruck $(T\,T'\,T'')^{\alpha-1}$ gleich

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3\alpha-3} (2x + 1)^{\alpha-1} \left\{(1 - x^2) - 3y^2\right\}^{\alpha-1}$$

wird.

Man erhält dann die Formel (5. 1)

$$\frac{1}{(1 - 2h^3\cos 3\vartheta + h^6)^{\alpha}} = \frac{2\,\Gamma(3\alpha)}{3^{3\alpha-2}\sqrt{3}\,\Gamma^3(\alpha)} \int_{\triangle_0} \frac{\left\{(2x + 1)\left((1 - x)^2 - 3y^2\right)\right\}^{\alpha-1}}{\left\{1 - 2h(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta) + h^2\right\}^{3\alpha}}\, dx\, dy.$$

[4]) HERMITE, Charles. Oeuvres. Bd. II. 1908 Paris. Gauthier-Villars S. 319—346.

oder durch Entwicklung nach $h$ und Vergleich der $h$ Potenzen

$$C_n^{\alpha}(\cos 3\vartheta) = \frac{2\,\Gamma(3\alpha)}{3^{3\alpha-2}\sqrt{3}\;\Gamma^3(\alpha)} \int_{\triangle_0} \{(2x+1)((1-x)^2-3y^2)\}^{\alpha-1}$$
$$C_{3n}^{3\alpha}(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta)\,dx\,dy.$$

Insbesondere gilt für $\alpha = \frac{1}{2}$

$$P_n(\cos 3\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_{\triangle_0} \{(2x+1)((1-x)^2-3y^2)\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$C_{3n}^{\frac{3}{2}}(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta)\,dx\,dy.$$

Nun ist bekanntlich $C_n'^{\alpha}(\alpha) = 2\alpha\, C_{n-1}^{\alpha+1}(x)$, und wir erhalten als Schlußformel die Gleichung

$$P_n(\cos 3\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_{\triangle_0} \{(2x+1)((1-x)^2-3y^2)\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$P'_{3n+1}(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta)\,dx\,dy.$$

Wie in der Einleitung erwähnt wurde, gelten ähnliche Formeln, wenn man weitere Dimensionen hinzuzieht und entsprechende mehrfache Integrale verwendet. In daran anschließenden Arbeiten wird gezeigt, daß die hier benutzte Methode auf eine eigentümliche Art zu einer physikalisch deutbaren Integralgleichung für die Gegenbauerschen Polynome $C_n^{\alpha}(x)$ führt, welche die Eigenwerte $\lambda_n = n + \alpha$ besitzt.

(Eingegangen am 24. Februar 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 1, S. 84—95 (1950).

# Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Funktionen.

Von

**Wolfgang Rothstein** in Würzburg.

Schon 1906 hat HARTOGS[1]) einen Satz für reguläre Funktionen bewiesen, den man seiner Bedeutung wegen vielfach Hauptsatz nennt. Wir wollen ihn gleich auch für meromorphe Funktionen formulieren.

Hauptsatz. *Die Funktion* $f(w_1, \ldots, w_n, z)$ *sei in* $\{|w_1| < 1, \ldots; |w_n| < 1, |z| < 1\}$ *regulär (meromorph). Ferner möge für jedes* $(c_1, \ldots, c_n)$ *aus* $\{|w_1| < 1; \ldots; |w_n| < 1\}$ *die Funktion* $g_c(z) = f(c_1, \ldots, c_n, z)$ *noch in* $|z| < 2$ *regulär (meromorph) sein.*

*Dann ist* $f(w_1, \ldots, w_n, z)$ *in* $\{|w_1| < 1; \ldots; |w_n| < 1; |z| < 2\}$ *regulär (meromorph).*

Seine Bedeutung liegt vor allem darin, daß er Ergebnisse über Funktionen von zwei Veränderlichen auf Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen zu übertragen erlaubt. HARTOGS benutzte ihn zum Beweis der grundsätzlich wichtigen Tatsache, daß eine eindeutige Funktion $f(w, z)$ regulär in $(w, z)$ ist, wenn sie in eine reguläre Funktion von einer Veränderlichen übergeht, sobald $w$ oder $z$ festgelassen wird.

Bisher ist ein Beweis des Satzes für meromorphe Funktionen nicht bekannt. HARTOGS hat ihn für reguläre Funktionen mit Hilfe der Reihen $\sum a_n(w) \cdot z^n$ abgeleitet; er stützte sich hauptsächlich auf den superharmonischen Charakter von $\log |a_n(w)|$. Die dabei benutzten Mittel aus der Theorie der reellen Funktionen sind ziemlich tiefliegend.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen möglichst elementaren Beweis des Satzes anzugeben, der auch für meromorphe Funktionen brauchbar ist. Aus der Potentialtheorie wird nur das benutzt, was ohnehin zur Konstruktion der Regularitätshüllen HARTOGS'scher Gebiete notwendig ist. Die Grundlage des Beweises sind der superharmonische Charakter der Regularitäts- und Meromorphieradien und ein Satz über superharmonische Funktionen (§ 1 Satz 1). Einen ähnlichen, nicht ganz so allgemeinen Satz hat schon HARTOGS für die Regularitätsradien angegeben. Außerdem wird mehrfach ein bekannter Satz aus der

[1]) F. HARTOGS, Zur Theorie der anal. Funkt. etc. Math. Ann. 62 (1906), 1 ff.

Mengenlehre gebraucht, der auch von Hartogs und Anderen in diesem Zusammenhange herangezogen wurde[2]). Wenn wir uns auf die übliche

Definition. „Die Punktmenge $N$ liegt in der Punktmenge $M$ dicht, wenn jeder Punkt von $M$ zu $N$ gehört oder Häufungspunkt von $N$ ist"

stützen, lautet er:

Satz A. *Die abgeschlossene Menge $M$ sei die Vereinigungsmenge der Punktmengen $N(m)$ der Ebene: $M = \sum_1^\infty N(m)$. Dann existiert ein Punkt $P$ in $M$, ein Kreis $K$ um $P$ und eine Zahl $p$, so daß $N(p)$ in $M \cap K$ dicht liegt.*

Es ist zu beachten, daß $M$ und $N$ auch Mengen mit endlich vielen Elementen sein dürfen.

Der einfache Beweis möge hier folgen.

Angenommen, der Satz sei falsch. Man greife einen Punkt $P_1$ aus $M$ und einen Kreis $K_1$ um $P_1$ heraus, so daß im abgeschlossenen $K_1$ kein Punkt von $N(1)$ liegt. Da $N(2)$ in $M \cap K_1$ nicht dicht liegt, gibt es einen Punkt $P_2$ in $M \cap K_1$ und einen Kreis $K_2 < K_1$ um $P_2$, so daß im abgeschlossenen $K_2$ kein Punkt von $N(2)$ liegt. Wird dieses Verfahren für $m = 3, 4, \ldots$ fortgesetzt, so erhält man eine Folge von Kreisen $K_m < K_{m+1}$ und Punkten $P_m$ aus $M \cap K_m$ so, daß im abgeschlossenen $K_m$ kein Punkt von $N(m)$ liegt. Es sei $\lim P_m = Q$. Da $M$ abgeschlossen ist, liegt $Q$ in $M$. Andererseits liegt der Konstruktion zufolge $Q$ im Inneren aller $K_m$, gehört also keiner der Mengen $N(m)$ an und daher auch nicht ihrer Vereinigungsmenge. Das widerspricht der Voraussetzung $M = \sum N(m)$.

**Inhaltsübersicht.**

§ 1. Hilfssätze.
§ 2. Beweis des Hauptsatzes für reguläre Funktionen.
§ 3. Meromorphe Funktionen von zwei Veränderlichen.
§ 4. Meromorphe Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen.

## § 1.

## Hilfssätze.

Wie üblich verstehen wir unter dem Regularitätsradius (Meromorphieradius) $Q(w')$ einer regulären (meromorphen) Funktion $f(w, z)$ den Radius des größten, auf der Ebene $w = w'$ gelegenen Kreises um den Nullpunkt, in dessen inneren Punkten $f(w, z)$ regulär (meromorph) ist. Bekanntlich ist $\log Q(w)$ superharmonisch.

---

[2]) W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1. Lief. 2. Auflage, 230 ff. Teubner 1929.

Bei Funktionen der Veränderlichen $(w_1, \ldots, w_n, z)$ definieren wir die Regularitäts- (Meromorphie-)Radien für unsere Zwecke wie folgt: $Q(w_1', r)$ ($r$ fest) ist der Radius des größten Kreises $|z| < \varrho$, so daß $f(w_1, \ldots, w_n, z)$ noch in allen Punkten von $\{w_1 = w_1'; |w_2| < r; \ldots; |w_n| < r; |z| < Q\}$ regulär (meromorph) ist. Die Logarithmen der so erklärten $Q$ sind ebenfalls superharmonisch.

Grundlegend für das Folgende ist

Satz 1. *In $|w| < 1$ sei $h(w)$ superharmonisch und $h(w) \geqq 0$. Ferner seien $R_n$, $R$, $S_n$ Punkte aus $|w| < \alpha < 1$ und $R_n \to R$; $\overline{S_n R} > d > 0$. Der Jordanbogen $\mathfrak{C}_n$ verbinde $R_n$ mit $S_n$ in $|w| < \alpha < 1$.*

*Ist dann $h(w) \geqq A$ auf allen $\mathfrak{C}_n$, so ist auch $h(R) \geqq A$.*

Er folgt[3]) aus dem anderen

Satz. *Es sei $G$ der längs eines Jordanbogens $\mathfrak{C}$ von 0 nach 1 geschlitzte Einheitskreis und $\omega(w, \mathfrak{C}, G)$ das harmonische Maß von $\mathfrak{C}$ bezüglich $G$*[4]).

*Dann ist $\omega(a, \mathfrak{C}, G) \geqq \varphi(|a|)$ mit $\varphi(r) \to 1$ für $r \to 0$. Mit anderen Worten: Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein nur von $\delta$, nicht aber von $\mathfrak{C}$ abhängiges $\varepsilon > 0$, so daß $\omega > 1 - \delta$ innerhalb $|w| < \varepsilon$ ist.*

Zum Beweise[5]) bilde man $G$ so auf den Halbkreis $\{|\zeta| < 1; \operatorname{Im} \zeta > 0\}$ ab, daß die beiden Ufer von $\mathfrak{C}$ in den Kreisbogen $\{\zeta = \varrho \cdot e^{i\Theta}; 0 < \Theta < \pi\}$ und $|w| = 1$ in den reellen Durchmesser übergehen. Die Abbildung $w = g(\zeta)$ kann noch so normiert werden, daß das Bild von $a$ auf die imaginäre Achse fällt: $a = g(it_0)$; $0 < t_0 < 1$. Dann gilt

$$t_0 \geqq \frac{1 - \sqrt{|a|}}{1 + \sqrt{|a|}}$$ [6]).

Die Abbildung führt $\omega(w, \mathfrak{C}, G)$ über in das harmonische Maß $\omega'(\zeta)$ des Kreisbogens $\{\zeta = \varrho \cdot e^{i\Theta}; 0 < \Theta < \pi\}$ bezüglich des Halbkreises $\{|\zeta| < 1; \operatorname{Im} \zeta > 0\}$. Für $t_0 \to 1$ strebt $\omega'(it_0) \to 1$. Daraus folgt die Behauptung.

Zum Beweise von Satz 1 fixiere man $e < d$; $e > 0$ so, daß die Kreise $K_n$ um $R_n$ vom Radius $e$ ganz in $|w| < 1$ liegen. $\mathfrak{C}_n'$ sei das $\mathfrak{C}_n$-Stück von $R_n$ bis zum ersten Schnittpunkt mit $|w - R_n| = e$. Nach dem vorhergehenden Satz gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein nur von $\delta$, nicht aber von $n$ abhängiges $\varepsilon > 0$, so daß $\omega(w, \mathfrak{C}_n', K_n) > 1 - \delta$ innerhalb $|w - R_n| < \varepsilon$ ist. Andererseits ist dort offenbar $h(w) > A \cdot \omega(w, \mathfrak{C}_n', K_n) > A(1 - \delta)$. Für genügend große $n$ ist $|R - R_n| < \varepsilon$, folglich $h(R) > A(1 - \delta)$.

---

[3]) Diesen kurzen Beweis des Satzes 1 verdanke ich Herrn H. Kneser. Mein ursprünglicher Beweis war weniger einfach. Anspruch auf Neuheit des Satzes erhebe ich nicht.

[4]) $\omega$ ist die in $G$ reguläre Potentialfunktion mit den Randwerten 1 auf $\mathfrak{C}$ und 0 auf $|w| = 1$.

[5]) Hierzu vergleiche: Erh. Schmidt, Über den Millouxschen Satz. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. (1932), 394—401.

[6]). Vgl. Erh. Schmidt, a. a. O., Formel (8).

**Anwendung auf die Regularitätsradien (Meromorphieradien).**

Satz 1 gilt insbesondere für die superharmonische Funktion $h(w) = \log Q(w)$. Er überträgt sich dann sofort auf $Q(w)$ selbst. — Im folgenden verstehen wir unter $G(q)$ immer ein Gebiet innerhalb $|w| < 1$, in dessen inneren Punkten $Q(w) \geqq q$ ist und welches ohne Aufgabe dieser Eigenschaft nicht erweitert werden kann. In $|w| < 1$ soll $Q(w) \geqq 1$ sein. Diese Gebiete $G(q)$ haben folgende Eigenschaften:

(1. 1) *Ist $c$ Randpunkt von $G(q)$ und $|c| < 1$, so gibt es eine Folge $c_n \to c$ mit $Q(c_n) < q$.*

Das folgt in der Tat sofort aus der Definition der $G(q)$.

(1. 2) *Es sei $G_n(q)$ eine Folge von Gebieten $G(q)$, $R$ ein in $|w| < 1$ liegender Häufungspunkt der $G_n(q)$ und $d_n$ der Durchmesser von $G_n(q)$.*

*Ist nun $Q(R) < q$, so gilt* $\lim d_n = 0$.

Angenommen, es sei $\lim d_n = D > 0$. Dann muß es zwei Punktfolgen $R_n$, $S_n$ mit $R_n \to R$; $\overline{S_n R} > d > 0$ und $R_n$, $S_n$ aus $G_n(q)$ geben. $\mathfrak{C}_n$ verbinde $R_n$ mit $S_n$ in $G_n(q)$. Offenbar kann man es so einrichten, daß $R$, $R_n$, $S_n$ und $\mathfrak{C}_n$ in einem Kreise $|w| < \alpha < 1$ liegen. Aus Satz 1 folgt nun im Widerspruch zur Voraussetzung $Q(R) \geqq q$. Also ist (1. 2) richtig. Außerdem brauchen wir noch die folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz 1. Die Funktion $f(w, z_1, \ldots, z_n)$ sei regulär in $Z = \{|w| < 1; |z_1| < 1; \ldots; |z_n| < 1\}$. Ferner seien: $G$ ein ganz in $|w| < 1$ gelegenes Gebiet der $w$-Ebene, $\mathfrak{R}$ sein Rand; $N$ eine Punktmenge in $|w| < 1$, die sich gegen jeden Punkt von $\mathfrak{R}$ häuft; $\mathfrak{Z}$ ein $\{|z_1| < 1; \ldots; |z_n| < 1\}$ umfassendes Gebiet des $(z)$-Raumes.

Dann gilt: Sind für alle $c$ aus $N$ die Funktionen $g((z)) = f(c, z_1, \ldots, z_n)$ in $\mathfrak{Z}$ regulär und eindeutig und gilt in $\mathfrak{Z}$ $|g((z))| \leqq A$ ($A$ unabhängig von $c$), so ist $f(w, z_1, \ldots, z_n)$ in $\{w$ aus $G$; $(z)$ aus $\mathfrak{Z}\}$ regulär und eindeutig. Ferner ist dort $|f| \leqq A$.

Beweis. (1) $\mathfrak{Z}$ sei ein Zylinder $\{|z_1| < d; \ldots; |z_n| < d\}$. In Z gestattet $f$ die Darstellung $f = \sum a_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(w) \cdot z_1^{\nu_1} \cdot z_2^{\nu_2} \cdots z_n^{\nu_n}$. Liegt $c$ in $N$, so gilt $|a_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(c)| \leqq A \cdot d^{-(\nu_1 + \cdots + \nu_n)}$ (Koeffizientensatz). Da jeder Punkt von $\mathfrak{R}$ Häufungspunkt von $N$ ist, bleibt diese Ungleichung für alle $c$ aus $\mathfrak{R}$ und dann (Maximumprinzip) für alle $c$ aus $G$ richtig. Die Reihe für $f$ konvergiert demnach in $\{w$ aus $G$; $(z)$ aus $\mathfrak{Z}\}$ absolut und gleichmäßig. $f$ ist dort also regulär. Liegt nun $(b_1, \ldots, b_n)$ in $\mathfrak{Z}$ und $c$ in $G$, so ergibt das Maximumprinzip $|f(c, b_1, \ldots, b_n)| \leqq A$.

(2) $\mathfrak{Z}$ sei beliebig. Dieser Fall wird in gewohnter Weise durch wiederholte Anwendung von (1) erledigt.

Eine Folge dieses Satzes ist

Hilfssatz 2. Z, $\mathfrak{Z}$, $G$, $\mathfrak{R}$ und $N$ seien wie oben erklärt. $f(w, z_1, \ldots, z_n)$ sei in Z regulär. $\mathfrak{Z}$ werde in Gebiete $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}_s$ ($s = 1, \ldots, S$) zerschnitten und es möge für alle $c$ aus $N$ gelten:

1. $g((z)) = f(c, z_1, \ldots, z_n)$ ist in $\mathfrak{Z}$ meromorph.
2. $g((z))$ ist in $\mathfrak{H}$ regulär und es gilt dort $g((z)) \leqq A < \infty$.
3. $1 : g((z))$ ist in $\mathfrak{K}_s$ regulär und es gilt dort $|g((z))| \geqq B > 0$.

$A$ und $B$ sind unabhängig von $c$.

Dann ist $f(w, z_1, \ldots, z_n)$ in $\{w$ aus $G$; $(z)$ aus $\mathfrak{Z}\}$ meromorph und außerdem bestehen die Ungleichungen $|f| \leqq A$ in $\{w$ aus $G$; $(z)$ aus $\mathfrak{H}\}$ und $|f| \geqq B$ in $\{w$ aus $G$; $(z)$ aus $\mathfrak{K}_s\}$.

Zum Beweise wendet man Hilfssatz 1 wiederholt auf die Funktionen $f$ und $1 : f$ an.

Anmerkung: Das Auftreten außerwesentlich singulärer Stellen zweiter Art ist im Hilfssatz 2 durch die Voraussetzungen ausgeschlossen.

Ebenso beweist man die folgenden Aussagen.

Hilfssatz 3. Z und $\mathfrak{Z}$ seien wie oben erklärt. $f(w, z_1, \ldots, z_n)$ sei in Z regulär. Ferner seien $M$ und $N$ zwei Punktmengen aus $|w| < \alpha < 1$ und $N$ in $M$ dicht.

Ist nun für jedes $c$ aus $N$ die Funktion $g((z)) = f(c, z_1, \ldots, z_n)$ in $\mathfrak{Z}$ regulär und eindeutig und $|g((z))| \leqq A$ ($A$ von $c$ unabhängig), so gilt die entsprechende Aussage für alle $c$ aus $M$.

Hilfssatz 4. Z, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}_s$ mögen wie in Hilfssatz 2, $M$ und $N$ wie in Hilfssatz 3 erklärt sein. $f(w, z_1, \ldots, z_n)$ sei in Z regulär. Für alle $c$ aus $N$ sei $g((z)) = f(c, z_1, \ldots, z_n)$ in $\mathfrak{Z}$ meromorph und zwar so, daß $g((z))$ in $\mathfrak{H}$ regulär und dort $|g((z))| \leqq A$, in $\mathfrak{K}_s$ dagegen $1 : g((z))$ regulär und dort $|g((z))| \geqq B > 0$ ($A, B$ unabhängig von $c$) ist. Dann gilt die entsprechende Aussage für alle $c$ aus $M$.

## § 2.

### Beweis des Hauptsatzes für reguläre Funktionen.

a) Funktionen von zwei Veränderlichen.

Der Hauptsatz ist bewiesen, sobald gezeigt worden ist: Wenn $0 < q_1 < 2$ ist, so gilt für den Regularitätsradius $Q(w)$ von $f(w, z)$ innerhalb $|w| < 1$ stets $Q(w) \geqq q_1$.

Von nun an sei $q_1 < 2$ festgelegt. Aus den Voraussetzungen des Hauptsatzes folgt unmittelbar

(2. 1) *Zu jedem $c(|c| < 1)$ gibt es eine Zahl $A(c)$ so, daß $|f(c, z)| < A(c)$ in $|z| < q_1$ ist.*

Weiter ergibt sich

(2. 2) *Die Gebiete $G(q_1)$ liegen in $|w| < 1$ dicht.*

Zum Beweise sei $K$ irgendein Kreis in $|w| < 1$. Die Menge derjenigen Punkte $c$ aus $K$, für welche $|f(c, z)| \leqq m$ in $|z| < q_1$ ist, heiße $N(m)$. Dann gilt $K = \sum_1^\infty N(m)$. Nach Satz A gibt es einen Kreis $K_1 < K$

und ein $p$, so daß $N(p)$ in $K_1$ dicht liegt. Wegen Hilfssatz 1 ist nun $Q(w) \geqq q_1$ in allen Punkten von $K_1$. Also gilt (2. 2).

Es ist natürlich nicht neu, daß man aus den Voraussetzungen des Hauptsatzes fast unmittelbar (2. 2) bekommt. Der Kern des Beweises ist die abschließende Aussage

(2. 3) *Es gibt nur ein Gebiet $G(q_1)$, den Einheitskreis.*

Zum Beweise greifen wir ein $G_1(q_1)$ heraus und zeigen, daß es in $|w| < 1$ keinen Randpunkt besitzt. Dann muß es offenbar mit $|w| < 1$ übereinstimmen. Angenommen, das sei nicht der Fall und $w_1$ mit $|w_1| < 1$ sei Randpunkt von $G_1(q_1)$. Dann nehme man einen ganz in $|w| < 1$ gelegenen Kreis $K_1$ um $w_1$. Die Menge aller innerhalb $K_1$ gelegenen Randpunkte aller $G(q_1)$ und ihrer Häufungspunkte sei $M$. Natürlich ist $M$ abgeschlossen. Ferner möge $N(m)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ die Menge derjenigen $M$-Punkte $c$ sein, für welche $|f(c, z)| \leqq m$ in $|z| < q_1$ gilt. Nach Satz A gibt es ein $p$, einen Punkt $w_2$ in $M$ und einen Kreis $K_2 \subset K_1$ um $w_2$, so daß $N(p)$ in $M \cap K_2$ dicht liegt. Aus Hilfssatz 3 folgt $N(p) = M \cap K_2$.

Wenn (2. 3) falsch ist, ergibt sich also

($\alpha$) Es gibt eine Zahl $p$, einen Punkt $w_2$ in $M$ und in $|w| < 1$ einen Kreis $K_2$ um $w_2$, so daß für alle $c$ aus $M \cap K_2$ und $|z| < q_1$ gilt: $|f(c, z)| \leqq p$.

Wegen (1. 1) gibt es nun in $K_2$ sicher einen Punkt $w_3$ mit $Q(w_3) = q_2 < q_1$. Da ferner innerhalb aller $G(q_1)$ stets $Q \geqq q_1$ ist, muß $w_3$ notwendig in $N(p)$ liegen. Wird schließlich $d > 0$ klein genug genommen, so sind wegen (1. 2) die Ränder aller $G(q_1)$, die mit dem Kreise $K_3 = \{|w - w_3| \leqq d\}$ gemeinsame Punkte haben, ganz in $N(p) = M \cap K_2$ enthalten. Nach Hilfssatz 1 gilt infolgedessen $|f(c, z)| \leqq p$ für $|z| < q_1$ und alle $c$ aus $G(q_1) \cap K_3$; hier kann $G(q_1)$ irgendeines der $G(q_1)$-Gebiete sein, welches $K_3$ schneidet. Nun liegen die $G(q_1)$ in $K_2$ dicht (vgl. (2. 2)). Also ergibt sich, wenn man noch ($\alpha$) beachtet:

($\beta$) Wenn $|z| < q_1$ und $c$ in $K_3$, so ist $|f(c, z)| \leqq p$.

Dann ist aber $f(w, z)$ nach Hilfssatz 1 im Gebiet $\{w$ aus $K_3$; $|z| < q_1\}$ regulär. Das widerspricht der Eigenschaft $Q(w_3) = q_2 < q_1$ von $w_3$. — (2. 3) ist also bewiesen.

b) Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen.

Wir wenden vollständige Induktion an und setzen voraus, der Satz sei bereits für die Funktionen $g(w_2, \ldots, w_n, z)$ bewiesen. Dann ist also $f(c, w_2, \ldots, w_n, z)$ auf Grund der Induktionsvoraussetzung und der Voraussetzungen des Hauptsatzes für alle $c$ $(|c| < 1)$ in $\{|w_2| < 1; \ldots; |w_n| < 1; |z| < 2\}$ regulär. Von nun an verläuft der Beweis ganz wie früher. Man muß nur außer $q_1 < 2$ noch ein $r < 1$ vorgeben und sämtliche Mannigfaltigkeiten durch den Zusatz $|w_2| < r; \ldots; |w_n| < r$ einschränken. An die Stelle der $G(q)$ treten die $G(q, r)$.

## § 3.

### Meromorphe Funktionen von zwei Veränderlichen.

Die Beweisanordnung des § 2 kann übernommen werden. Nur die Durchführung ist selbstverständlich verwickelter. Es ist zu zeigen:

*Wenn* $0 < q_1 < 2$ *ist, so gilt für den Meromorphieradius* $Q(w)$ *von* $f(w, z)$ *innerhalb* $|w| < 1$ *stets* $Q(w) \geqq q_1$.

Es werde $q_1 < 2$ festgelegt.

Die erste Aufgabe ist, das Analogon zu (2. 1) zu formulieren. Dazu betrachten wir eine feste Ebene $w = c$, die keine Polfläche von $f(w, z)$ ist. Auf ihr mögen im abgeschlossenen Kreise $\{|z| \leqq q_1\}$ $S$ Pole $z_s$ liegen. Man fixiere nun ein rationales $d > 0$ und $S$ rationale Punke $a_s$ der $z$-Ebene, ferner zwei positive ganze Zahlen $A$ und $B$ so, daß gilt:

(1) Die Kreise $\mathfrak{K}_s = \{|z - a_s| < d\}$ liegen ganz in $|z| < 2$, sind paarweise punktfremd und enthalten je genau einen Pol im Innern.

(2) In allen $\mathfrak{K}_s$ gilt $|f(c, z)| \geqq B$.

(3) Im Restgebiet $\mathfrak{H} = \{(|z| < q_1) - \sum_1^S \mathfrak{K}_s\}$ gilt $|f(c, z)| \leqq A$.

Das bisher Geschehene wird vollständig beschrieben durch den Komplex $\{S, a_1, \ldots, a_S, d, A, B\}$ rationaler Zahlen. Als Analogon zu (2. 1) hat man infolgedessen

(3. 1) *Ist die Ebene* $w = c$ *keine Polfläche, so kann der Kreis* $|z| < q_1$ *in der oben angegebenen Art in Gebiete* $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_S$ *zerschnitten werden. In* $\mathfrak{H}$ *ist* $|f(c, z)| \leqq A$, *in* $\mathfrak{K}_s$ *ist* $|f(c, z)| \geqq B$. *Die Zerschneidung ist eindeutig durch einen Komplex* $L(c) = (S, a_1, \ldots, a_s, d, A, B)$ *rationaler Zahlen gekennzeichnet. Die Zahlen von* $L$ *hängen von* $c$ *ab.*

Wir denken uns nun auf jeder Ebene $w = c$, die keine Polfläche ist, den Kreis $|z| < q_1$ nach (3. 1) zerschnitten. Die Zerschneidung ist weitgehend willkürlich, wird aber durch einen Komplex $L$ genau beschrieben, wenn sie einmal vollzogen ist. Jedem $c$, für das $w = c$ keine Polfläche ist, sei nun ein Komplex $L(c)$ zugeordnet. Von dieser Zuordnung gehen wir aus. Wenn wir dann sagen: „Den $c$ aus $M$ kann derselbe Komplex zugeordnet werden", so bedeutet das: „Auf allen diesen Ebenen kann dieselbe Zerschneidung mit denselben Zahlen $A$ und $B$ vorgenommen werden." — Die Menge aller $L(c)$ ist abzählbar; sie werde in eine Folge $L_m$ geordnet. Wir kommen jetzt zum Beweise von

(3. 2) *Die Gebiete* $G(q_1)$ *liegen in* $|w| < 1$ *dicht.*

Man greife einen Kreis $K$ aus $|w| < 1$ so heraus, daß für kein $c$ aus $K$ die Ebene $w = c$ Polfläche von $f(w, z)$ ist. Jedem $c$ aus $K$ ist einer der Komplexe $L_m$ zugeordnet. $N(m)$ sei die Menge derjenigen $c$ aus $K$, denen $L_m$ zugeordnet ist. Es ist $K = \sum_1^\infty N(m)$. Nach Satz A gibt es ein $p$ und einen Kreis $K_1 < K$ so, daß $N(p)$ in $K_1$ dicht liegt.

Aus Hilfssatz 2 folgt dann, daß $f(w, z)$ in $\{w$ aus $K_1;\ |z| < q_1\}$ meromorph ist. Damit ist (3. 2) bewiesen.

Nun ist noch zu beweisen

(3. 3) *Es gibt nur ein Gebiet $G(q_1)$, den Einheitskreis.*

Angenommen, (3. 3) sei falsch. Wir verfahren zunächst ganz ähnlich wie unter (2. 3). Der Punkt $w_1$ in $|w| < 1$ sei Randpunkt von $G_1(q_1)$. Wir setzen voraus, daß $w = w_1$ keine Polfläche ist. Etwa im Punkte $(w_1, z_1)$ mit $|z_1| < 1$ sei $f(w, z)$ regulär. Der Kreis $K_1 = \{|w - w_1| < e_1\}$ werde so gewählt, daß $f(w, z)$ noch in allen Punkten $\{z = z_1;\ |w - w_1| \leqq e_1\}$ regulär ist. $M$ sei die Menge aller in $K_1$ gelegenen Randpunkte der $G(q_1)$ und ihrer Häufungspunkte.

$M$ ist abgeschlossen. Jedem $c$ aus $M$ ist ein $L_m$ zugeordnet. Die Menge derjenigen $c$ aus $M$, denen $L_m$ zugeordnet ist, heiße $N(m)$. Dann ist $M = \sum_1^\infty N(m)$ und aus Satz A folgt: Es gibt eine Zahl $p$, einen Punkt $w_2$ in $M$ und einen Kreis $K_2 \subset K_1$ um $w_2$, so daß $N(p)$ in $M \cap K_2$ dicht liegt. Aus Hilfssatz 4 schließt man weiter, daß allen Punkten von $M \cap K_2$ der Komplex $L_p$ zugeordnet werden kann. — Fassen wir zusammen:

($\alpha$) Wenn es innerhalb $|w| < 1$ einen Randpunkt $w_1$ von $G_1(q_1)$ gibt, für welchen $w = w_1$ keine Polfläche von $f(w, z)$ ist, so gibt es auch einen zu $M$ gehörigen Punkt $w_2$ (der folglich nicht in einem der $G(q_1)$ liegt), einen Kreis $K_2 = \{|w - w_2| < e_2\}$ und schließlich ein $z_1$ in $|z_1| < 1$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $f(w, z)$ ist regulär in allen Punkten $\{z = z_1;\ |w - w_2| \leqq e_2\}$.

(2) Allen in $K_1$ gelegenen Punkten von $M$ kann derselbe Komplex $L_p$ zugeordnet werden. Diese neue Zuordnung werde festgehalten. Ihr entspricht möglicherweise auf einem Teil der Ebenen $w = c$ ($c$ aus $M \cap K_2$) eine neue Zerschneidung der Kreise $|z| < q_1$.

Wegen (1. 1) gibt es in $M \cap K_2$ sicher einen Punkt $w_3$ mit $Q(w_3) = q_2 < q_1$. Weil im Innern der $G(q_1)$ stets $Q \geqq q_1$ ist, muß $w_3$ wirklich in $M$ liegen. Ist nun $e_3$ klein genug, so gehören die Ränder aller $G(q_1)$, die den Kreis $K_3 = \{|w - w_3| \leqq e_3\}$ überhaupt schneiden, wegen (1. 2) zu $M \cap K_2$. Daraus folgt

($\beta$) Allen Punkten von $K_3$ kann der Komplex $L_p$ zugeordnet werden.

Denn nach ($\alpha$) ist den $c$ aus $M \cap K_2$ bereits $L_p$ zugeordnet, insbesondere auch den Randpunkten aller $G(q_1)$, welche $K_3$ schneiden. Dann aber kann $L_p$ nach Hilfssatz 2 auch den inneren Punkten dieser $G(q_1)$ zugeordnet werden. Die $G(q_1)$ liegen nun in $K_3$ dicht (3. 2).

Aus ($\beta$) und Hilfssatz 2 folgt sofort, daß $f(w, z)$ in allen Punkten des Gebietes $\{w$ aus $K_3;\ |z| < q_1\}$ meromorph ist. Das widerspricht der Eigenschaft $Q(w_3) = q_2 < q_1$.

Deshalb kann $w_1$ höchstens dann Randpunkt von $G_1(q_1)$ sein, wenn $w = w_1$ Polfläche ist. Diese Punkte liegen jedoch isoliert und kommen aus diesem Grunde nicht in Betracht.

Damit ist (3. 3) vollständig bewiesen.

Anmerkung: Es ist auffallend, daß die außerwesentlichen Singularitäten zweiter Art von $f(w, z)$ gar nicht in Erscheinung getreten sind. Der Beweis ist so angelegt, daß diese kritischen Stellen von selbst ausgeschlossen werden. Insbesondere konnte im Kreise $\{w = w_1; |z| < q_1\}$ keine dieser Singularitäten liegen

## § 4.

### Meromorphe Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen.

Auch bei meromorphen Funktionen $f(w_1, \ldots, w_n, z)$ mit $n \geqq 2$ ändert sich am Beweisverfahren grundsätzlich nichts. Wie bei den regulären Funktionen darf man von der Voraussetzung ausgehen, für jedes $c$ mit $|c| < 1$ sei $f(c, w_2, \ldots, w_n, z)$ in $\{|w_2| < 1; \ldots; |w_n| < 1; |z| < 2\}$ meromorph. Die bei zwei Veränderlichen mögliche Aufteilung des auf einer Ebene $w = c$ gelegenen Gebietes in Teilgebiete, in denen entweder stets $|f(c, z)| \leqq A(c)$ oder stets $|f(c, z)| \geqq B(c)$ ist, gelingt hier jedoch nicht, da die Funktion $f(c, w_2, \ldots, w_n, z)$ in der Umgebung einer außerwesentlich singulären Stelle zweiter Art — das sind die Schnittpunkte von Null- und Polstellenflächen — jeden beliebigen Wert annimmt. Zur Überwindung dieser Schwierigkeit sind besondere Überlegungen erforderlich. Wir benutzen dazu den

Hilfssatz 5. $f(u, v, z_1, \ldots, z_n)$ sei auf den beiden Mantelflächen $\{|u| = 1; |v| \leqq 1; |z_j| \leqq 1\}$ und $\{|v| = 1; |u| \leqq 1; |z_j| \leqq 1\}$ des Zylinders $Z = \{|u| < 1; |v| < 1; |z_j| < 1\}$ eindeutig und meromorph $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Dann ist $f$ auch im Innern von Z meromorph.

Zum Beweise betrachten wir die Gebiete $H(a) = \{0 < a < |u| < 1; |v| < 1; |z_j| < 1\}$. Für genügend großes $a < 1$ ist voraussetzungsgemäß $f$ noch in $H(a)$ meromorph. $A \geqq 0$ sei das kleinste $a$ mit dieser Eigenschaft. Dann ist $f$ also in $H(A)$ noch meromorph und eindeutig. Angenommen, auf $\{|u| = A; |v| \leqq 1; |z_j| \leqq 1\}$ liege wenigstens eine wesentliche Singularität $S = (A \cdot e^{i\theta}, V, \zeta_j)$. Auf $|v| = 1$ ist die Meromorphie vorausgesetzt. Infolgedessen muß $|V| < 1$ sein. Nun fassen wir eine Folge $A_m \to A$ mit $A_m > A$ und die zweidimensionalen Ebenen $E_m = \{u = A_m \cdot e^{i\theta}; z_j = \zeta_j\}$ ins Auge. Auf der Grenzebene $E = \{u = A \cdot e^{i\theta}; z_j = \zeta_j\}$ ist $f$ auf der Peripherie $|v| = 1$ meromorph; im Innern von $|v| < 1$ liegt der singuläre Punkt $S$. Der Kontinuitätssatz sagt aus, daß dann auch auf den $E_m$ im Kreise $|v| < 1$ eine wesentlich singuläre Stelle liegen muß. Das ist jedoch nicht der Fall. Daraus folgt erstens, daß $A = 0$ ist, und zweitens, daß $f$ auch innerhalb $\{u = 0; |v| < 1; |z_j| < 1\}$ meromorph bleibt. Das ist die Behauptung.

Nun sei eine $(2n - 2s)$-dimensionale analytische Fläche $F$ gegeben und es sei $s \geqq 2$. Ein Punkt $P$ dieser Fläche heißt „gewöhnlich", wenn es eine Umgebung $U(P)$ und eine dort ein-eindeutige analytische

Abbildung $T$ gibt, die $F$ in ein $(2n-2s)$-dimensionales analytisches Ebenenstück $\tilde{E} = \{\tilde{z}_1 = \tilde{z}_2 = \cdots = \tilde{z}_s = 0\}$ überführt. Es sei $T(P) = 0$; $T\{U(P)\} = \tilde{U}(0)$. Wir wählen $e > 0$ so klein, daß der Zylinder $\tilde{Z}(e) = \{|\tilde{z}_1| < e; \ldots; |\tilde{z}_n| < e\}$ ganz in $\tilde{U}(0)$ liegt. Die Vereinigung der beiden Mantelflächen $\{|\tilde{z}_1| = e; |\tilde{z}_2| \leqq e; \ldots; |\tilde{z}_n| \leqq e\}$ und $\{|\tilde{z}_2| = e; |\tilde{z}_1| \leqq e; |\tilde{z}_3| \leqq e; \ldots; |\tilde{z}_n| \leqq e\}$ sei $\tilde{\mathfrak{S}}(e)$, ihr Bild $T^{-1}\{\tilde{\mathfrak{S}}(e)\} = \mathfrak{S}(e)$. Auf Grund des Hilfssatzes 5 folgt aus der Meromorphie von $f$ auf $\mathfrak{S}(e)$ die Meromorphie in $Z(e) = T^{-1}\{\tilde{Z}(e)\}$.

Es sei $F_0$ ein abgeschlossenes Stück von $F$, das nur gewöhnliche Punkte besitzt. Man bestimme nun erstens zwei Bereiche $\mathfrak{B}_1 \ll \mathfrak{B}_2$[7]), die beide den Rand von $F_0$ einhüllen, und zweitens zwei Gebiete $\mathfrak{G}_1 \ll \mathfrak{G}_2$, die beide $F_0$ einhüllen. Es ist möglich, $\mathfrak{G}_1$ so festzulegen, nachdem $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{G}_2$ bestimmt sind, daß gilt (wie gewöhnlich bezeichnet $\overline{\mathfrak{B}}$ das Komplement von $\mathfrak{B}$):

Ist $f(z_1, \ldots, z_n)$ in $\mathfrak{G}_2 \cap \overline{\mathfrak{G}}_1 \cap \overline{\mathfrak{B}}_1$ meromorph, so auch in $\mathfrak{G}_1 \cap \overline{\mathfrak{B}}_2$. Denn offenbar kann das abgeschlossene Stück von $F_0$, dessen Punkte im Inneren oder auf dem Rande von $\overline{\mathfrak{B}}_2$ liegen, mit endlich vielen der oben betrachteten $Z(e)$ eingehüllt werden, die sämtlich ganz in $\mathfrak{G}_2 \cap \overline{\mathfrak{B}}_1$ liegen. $\mathfrak{G}_1$ werde nun so gewählt, daß $\mathfrak{G}_1 \cap \overline{\mathfrak{B}}_2$ ganz im Vereinigungsgebiet der $Z(e)$ liegt und alle $\mathfrak{S}(e)$ ganz in $\overline{\mathfrak{G}}_1$ enthalten sind. Dann ist $f$ nach Voraussetzung meromorph auf allen $\mathfrak{S}(e)$, also auch in allen $Z(e)$ und folglich in $\mathfrak{G}_1 \cap \overline{\mathfrak{B}}_2$.

*Wesentlich für das Folgende ist, daß natürlich alle Überdeckungen durch eine endliche Anzahl von Hyperkugeln mit rationalen Mittelpunkten und Radien vollzogen werden können, dann also durch einen endlichen Komplex von rationalen Zahlen vollständig bestimmt sind.*

Bei der Durchführung unseres Beweises sind störend die auf den Ebenen $w_1 = c$ auftretenden Schnittflächen von Null- und Polstellenmannigfaltigkeiten. *Sie werden zunächst durch Systeme von $(2n-2)$-dimensionalen Hyperkugeln ausgeschlossen und zwar so, daß nachträglich die Meromorphie in den ausgeschlossenen Teilen folgt.* Wir wollen das Verfahren an einem einfachen Fall erläutern, der alle charakteristischen Züge trägt. Es möge sich um eine Ebene $w_1 = c$ und eine Funktion $g(w_2, w_3, z) = f(c, w_2, w_3, z)$ handeln, die nur eine kritische Fläche $F^{(1)}$ — die Schnittfläche einer Null- und Polstellenfläche — besitzt. $F^{(1)}$ möge nur eine Verzweigungsfläche $F^{(2)}$, und diese wieder nur einen Verzweigungspunkt $P$ aufweisen. $\mathfrak{A}_3 \ll \mathfrak{A}_2 \ll \mathfrak{A}_1$ seien die Gebiete $\mathfrak{A}_i = \{|w_2| < r_i; |w_3| < r_i; |z| < q_i; r_3 < r_2 < r_1 < 1; q_3 < q_2 < q_1 < 2\}$. Die in $\mathfrak{A}_i$ gelegenen Stücke von $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ seien $F_i^{(1)}$, $F_i^{(2)}$. Das Komplement einer Menge $M$ werde mit $\overline{M}$ bezeichnet.

---

[7]) „Bereich" bedeutet hier eine Punktmenge, die sich aus endlich vielen Gebieten zusammensetzt.

Man geht nun so vor: Zunächst schlage man um $P$ drei Hyperkugeln $\mathfrak{H}_3 \ll \mathfrak{H}_2 \ll \mathfrak{H}_1 \ll \mathfrak{A}_3$. Ferner sollen $\mathfrak{B}_3 \ll \mathfrak{B}_2 \ll \mathfrak{B}_1$ drei $F_1^{(2)}$ einhüllende Bereiche sein von der Art, daß aus der Meromorphie in $\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{B}_1 \cap \overline{\mathfrak{B}}_2 \cap \overline{\mathfrak{H}}_2$ die Meromorphie in $\mathfrak{A}_3 \cap \mathfrak{B}_2 \cap \overline{\mathfrak{H}}_1$ folgt. Schließlich werden die $F_1^{(4)}$ einhüllenden $\mathfrak{G}_2 \ll \mathfrak{G}_1$ so bestimmt, daß die Meromorphie in $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{G}_1 \cap \overline{\mathfrak{G}}_2 \cap \overline{\mathfrak{B}}_3 \cap \overline{\mathfrak{H}}_3$ die Meromorphie in $\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{G}_2 \cap \overline{\mathfrak{B}}_3 \cap \overline{\mathfrak{H}}_2$ nach sich zieht. Daraus folgt weiter:
Ist $f$ meromorph in $\mathfrak{A}_1 \cap \overline{\mathfrak{G}}_2 \cap \overline{\mathfrak{B}}_3 \cap \overline{\mathfrak{H}}_3$, so auch in $\mathfrak{A}_2 \cap \overline{\mathfrak{B}}_2 \cap \overline{\mathfrak{H}}_2$ und weiter in $\mathfrak{A}_3 \cap \overline{\mathfrak{H}}_1$. Dann muß $f$ überall in $\mathfrak{A}_3$ meromorph sein.

Im allgemeinen Fall verfährt man ganz entsprechend. Man beachte, daß die nicht-gewöhnlichen Stellen einer $F^{(2\nu)}$ auf endlich vielen höchstens $(2\nu-2)$-dimensionalen analytischen Flächenstücken liegen. Alle diese Stellen nennen wir „kritisch".

Man geht bei der Konstruktion der Hüllgebiete stets von den kritischen Stellen der niedrigsten Dimension aus und hüllt nacheinander alle kritischen Flächen ein. Werden zum Aufbau der Hüllgebiete nur endlich viele Hyperkugeln mit rationalen Mittelpunkten und Radien benutzt — und das ist stets möglich —, so ist die ganze Konstruktion durch einen endlichen Komplex rationaler Zahlen genau charakterisiert.

Die Ergebnisse fassen wir zusammen zu dem Analogon von (3. 1):

(4. 1) *Auf der Ebene $w_1 = c$, die keine Polfläche sein möge, seien die Gebiete $\mathfrak{A}_2 \ll \mathfrak{A}_1$; $\mathfrak{A}_i = \{|w_2| < r_i; \ldots; |w_n| < r_i; |z| < q_i; r_2 < r_1 < 1; q_2 < q_1 < 2\}$ gegeben. $F_{\mathrm{Kr.}}$ sei die Mannigfaltigkeit der innerhalb und auf dem Rande von $\mathfrak{A}_1$ gelegenen außerwesentlichen Singularitäten 2. Art der Funktion $f(c, w_2, \ldots, w_n, z)$. Dann kann stets eine Reihe von Gebieten $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_K$ angegeben werden, so daß $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{S}_K$ die $F_{\mathrm{Kr.}}$ einhüllt und die Meromorphie in $\mathfrak{A}_1 \cap \overline{\mathfrak{S}}$ die Meromorphie in $\mathfrak{A}_2$ nach sich zieht. Insbesondere läßt $\mathfrak{S}$ sich so wählen, daß es durch einen endlichen Komplex rationaler Zahlen eindeutig bestimmt ist. Schließlich kann noch ein — gleichfalls durch einen endlichen Komplex rationaler Zahlen eindeutig bestimmtes $\mathfrak{S}^* \ll \mathfrak{S}$ konstruiert werden, so daß auch $\mathfrak{S}^*$ die $F_{\mathrm{Kr.}}$ einhüllt. Aus der Meromorphie in $\mathfrak{A}_1 \cap \overline{\mathfrak{S}}^*$ folgt dann die in $\mathfrak{A}_2$. In $\mathfrak{A}_1 \cap \overline{\mathfrak{S}}^*$ gibt es keine außerwesentliche Singularität 2. Art; man kann also wie in § 3 zwei natürliche Zahlen $A$ und $B$ angeben und dazu eine Einteilung von $\mathfrak{A}_1 \cap \overline{\mathfrak{S}}^*$ in Teilgebiete $\mathfrak{G}_\lambda$, so daß in $\mathfrak{G}_\lambda$ entweder stets $|f| \leqq A$ oder stets $|f| \geqq B$ ist. Die $\mathfrak{G}_\lambda$ seien wieder rational bestimmt.*

*Der Ebene $w_1 = c$ läßt sich dann ein endlicher Komplex rationaler Zahlen zuordnen, der all das genau angibt, was bisher geschehen ist.*

Außerdem möge noch bemerkt werden: Gehören zu allen $w_1$ eines Gebietes $K$ dieselben $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{S}$, so folgt aus der Meromorphie einer Funktion $f(w_1, w_2, \ldots, w_n, z)$ in $\{w_1$ aus $K$; $(w_2, \ldots, w_n, z)$ aus $\mathfrak{A}_1 \cap \overline{\mathfrak{S}}\}$ die Meromorphie in $\{w_1$ aus $K$; $(w_2, \ldots, w_n, z)$ aus $\mathfrak{A}_2\}$. Daß

die Veränderliche $w_1$ hinzukommt, spielt hier gar keine Rolle. (Vgl. Hilfssatz 5.)

*Beweis des Hauptsatzes.* Die $G(q, r)$ seien diejenigen Teilgebiete von $|w_1| < 1$, in deren inneren Punkten $Q(w_1, r) \geqq q$ ist und die nicht erweitert werden können. Man gebe nun $0 < r_2 < r_1 < 1$ und $0 < q_2 < q_1 < 2$ beliebig vor, führe die oben dargestellte Konstruktion der Bereiche $\mathfrak{S}(c)$ und $\mathfrak{S}^*(c)$, sowie die Zerschneidung in die $\mathfrak{G}_\lambda(c)$ für jedes $c$ aus $|w_1| < 1$ ($w_1 = c$ keine Polfläche) durch und charakterisiere sie durch einen endlichen Komplex $L(c)$ rationaler Zahlen. Die Menge aller $L$ ist abzählbar und wird in eine Folge $L_m$ geordnet.

(4. 2) *Die $G(q_2, r_2)$ liegen in $|w_1| < 1$ dicht.*

Zunächst folgt genau wie unter (3. 2) bei beliebig vorgegebenem Kreis $K$ aus $|w_1| < 1$ die Existenz eines Kreises $K_1 \subset K$, so daß $f$ in allen Punkten von $\{w_1$ aus $K_1$; $(w_2, \ldots, w_n, z)$ aus $\mathfrak{A}_1 \cap \overline{\mathfrak{S}}^*\}$ noch meromorph ist. Dann ist $f$ aber auch in $\{w_1$ aus $K_1$; $(w_2, \ldots, w_n, z)$ aus $\mathfrak{A}_2\}$ meromorph. Das ist die Behauptung.

(4. 3) *Es gibt nur ein $G(q_2, r_2)$, den Einheitskreis.*

Im Beweis zu (3. 3) ersetze man $G(q_1)$ durch $G(q_2, r_2)$, $w_1, w_2, w_3$ durch $w_1^{(1)}, w_1^{(2)}, w_1^{(3)}$ und $z_1$ durch $(w_2^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}, z_1)$. Also soll z. B. $f$ regulär sein in $K_1 = \{|w_1 - w_1^{(1)}| \leq e_1;\ (w_2, \ldots, w_n, z) = (w_2^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}, z_1)\}$. Zu $w_1^{(3)}$ gehört ein $Q(w_1^{(3)}, r_2) = q_3 < q_2$. Nun geht alles so wie unter (3. 2) bis zur Aussage ($\beta$). Aus ($\beta$) und Hilfssatz 2 folgt, daß $f$ meromorph ist in allen Punkten von $\{w_1$ aus $K_3$; $(w_2, \ldots, w_n, z)$ aus $\mathfrak{A}_1 \cap \overline{\mathfrak{S}}^*\}$ also auch in $\{w_1$ aus $K_3$; $(w_2, \ldots, w_n, z)$ aus $\mathfrak{A}_2\}$. Das aber widerspricht der Definition von $w_1^{(3)}$.

Die Annahme eines Randpunktes $w_1^{(1)}$ eines $G(q_2, r_2)$, für welchen $w_1 = w_1^{(1)}$ keine Polfläche ist, hat also zum Widerspruch geführt. Da die $c$, für die $w_1 = c$ Polfläche ist, isoliert liegen müssen, können auch sie nicht Randpunkte von $G(q_2, r_2)$ sein. Damit ist (4. 3) bewiesen.

Da nun $q_2, r_2$ beliebig gewählt werden konnten, muß notwendig $Q(w_1, 1) \geqq 2$ in allen Punkten von $|w_1| < 1$ sein. Das ist die Aussage des Hauptsatzes.

(Eingegangen am 7. September 1949.)